数 学 学 报

ACTA MATHEMATICA SINICA

第 9 卷　　第 3 期

Vol. 9　　No. 3



中 国 数 学 会 編 輯

科 学 出 版 社 出 版

数　学　学　报

第 9 卷　第 3 期

目　录

ACTA MATHEMATICA SINICA Vol. 9. No. 3

CONTENTS

第9卷 第3期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 3
1959 年 9 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Sept., 1959

Steenrod 运算和同伦羣(I)*

周 学 光
(南 开 大 学)

設 n 为一大于 1 的整数，p 为一奇素数，当 $n < m < n + 4p - 5$ 时，J. P. Serre 在[5][6](指参考文献[5]和[6])中确定了 $C(\Pi_m(S^n), p)$.（$C(A, p)$ 表示交换羣 A 的 p 分量羣）J. C. Moore 和[5]同时得出了比[5]較深刻的結果，他在[4]中确定了当 $n < m < n + 6p - 7$ 时，$C(\Pi_m(S^n), p)$ 的代数构造，此后，H. Cartan 还得出了更深刻的結果.

作者在[3]中，已經把[5]的結果推广到更一般的 $(n-1)$ 維 C 連通空間上去，本文的目的則将[6]和[4]中的一部分結果推广到更一般的 $(n-1)-C$ 連通空間上去，当 $n < m < \min(2n-1, n+4p-5)$ 时，我們将用同調羣和 Steenrod 运算在同調羣上的对偶运算去确定 $C(\Pi_m(X), p)$. 以后，我們繼續研究推广 J. C. Moore 和 H. Cartan 的工作.

Hurewicz 利用同倫羣到同調羣的自然对应 Φ 确定了 $(n-1)$ 連通空間的 n 維同倫羣到 n 維同調羣的同构关系，在[3]中，我們用 Φ 去討論了維数更高的同倫羣和同維的同調羣的某种 C 同构关系，本文則对于自然对应的核 $\Phi^{-1}(0)$，利用 Steenrod 的汎函乘积的办法，介紹了同倫羣到低維同調羣的第二类自然同态对应. 第一，二类自然同态对应将是本文确定同倫羣的 p 分量羣的构造的基本工具，以后我們将介紹更高类的自然对应.

§1 将对本文所使用的一些符号作一些說明. §2 将介紹 Steenrod 乘方及其对偶运算的一些簡单性質. §3 則介紹同倫羣的第二类自然同态对应. §4 介紹同調羣的上边緣运算. §5 敘述本文的主要結果. §6 介紹一般空間的相当于复形的 n 維架 (n-skeleton) 的多面体 P. §7 則利用空間对 (X, P) 的同倫羣的关系去証明 §5 所敘述的主要結果. §8 介紹相对同倫羣的第二类自然同态对应. §9 則敘述相对同倫羣的类似的定理.

§1 一些符号的說明

本文虽然是[2]的一个繼續，但是由于[2]中的符号較繁，本文的符号和[2]不是完全一致的，所以，这里特将本文所使用的符号作一些說明.

(a) 关于羣論的一些符号

和一般文献一样，我們用 Z 来表示整数羣，Z_m 表示模 m 整数羣.

本文所考慮的 p 都假定是一个固定的奇素数，下一文我們将討論 $p = 2$ 的情形，我們用 C 表示所有这种交换羣所成的羣类，它所包含的交换羣中的元素的次数（对于羣 A 的任一元素 x，使 $\lambda x = 0$ 的最小正整数称为 x 的次数，如果这种正整数不存在，我們說 x 的次数是无穷大）都是一个与 p 互質的整数. 如果用 $T(p)$ 表示所有不等于 p 的素数所

---

* 1957 年 7 月 26 日收到.

成的集,这里的羣类 C 相当于[2]中的羣类 $C_{T(p)}$.

設 A、B 是两个交換羣, $f: A \to B$ 是一个同态对应, 如果 $f^{-1}(0) \in C$, 称 f 是 C 一一的,如果 $B/f(A) \in C$, 称 f 是 C 变上的,如果 f 是 C 变上的又是 C 一一的, 則称 f 是一个 C 同构对应,如果 A、B 是两个有限羣, 利用 A 和 B 的分解, 很容易說明, f 是一个 C 同构对应的充分必要条件是 f 引起了一个由 $C(A,p)$ 到 $C(B,p)$ 的同构对应.

如果 A 是一个交換羣, $a_1, \cdots, a_m$ 为 A 中的一組元素,如果使 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m = 0$ 的整数 $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ 一定使 $\lambda_1 a_1 = \lambda_2 a_2 = \cdots = \lambda_m a_m = 0$ (不一定 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \cdots$), 我們称 $a_1, \cdots, a_m$ 是綫性无关的,我們用 $[a_1, a_2, \cdots, a_m]$ 表示 A 中所有这种元素 $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$ 所成的子羣,如果 $a_1, \cdots, a_m$ 的次数不是 p 的乘数次乘冪就是无穷大,而且 $[a_1, \cdots, a_m]$ 到 A 的內射对应是一个 C 同构对应,我們称 $a_1, \cdots, a_m$ 是 A 的一組 C 基底. 如果 A 是一个具有有限多个母元素的交換羣, 利用 A 的分解, 可以很容易說明, A 至少有一組 C 基底. 如果 $f: A \to B$ 是一个同态对应,則 f 是 C 同构的充分必要条件是: 設 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 A 的任何一組 C 基底, 則 $f(a_1) \cdots f(a_m)$ 为 B 的一組 C 基底,而且, $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和 $f(a_1) \cdots f(a_m)$ 具有相同的次数.

(b) 关于拓扑学上的一些符号

这里的同調羣都假定是連續同調羣,如果沒有指出系数羣, 和一般文献一样, 我們是假定以整数为系数的.

本文所考虑的空間都假定是单連通的,它的同調羣都假定具有有限多个母元素,因而它的同倫羣也具有有限多个母元素. 由于它是单連通的, 考虑它的同倫羣时可以不考虑它的基点 (reference point).

設 $f: X \to Y$ 为一映象, 我們用 f^* 表示由 f 所引起的上同調羣的同态对应, 用 f_* 表示由 f 所引起的同調羣的同态对应.

設 E^m 为弧連通空間 X 的一个腔胞, 我們也用 E^m 表示它的特征映象所确定的連續单形鍊, 如果 E^m 是一个普通循环或者模 p 循环, 它所在的普通同調类或者模 p 同調类用 $[E^m]_*$ 表示,如果 E^m 是一个普通上循环或者模 p 上循环, 它所在的普通上同調类或者模 p 上同調类則用 $[E^m]^*$ 表示.

設 $\alpha: S^m \to X$ 为一映象,我們也用 α 表示 α 所在的同倫类, $\Pi_m(X)$ 到 $H_m(X)$ 的同态对应 Φ_m (用 $\Phi_m(\alpha) = \alpha_*([S^m]_*)$ 来确定)称为同倫羣到同調羣的第一类自然对应. 或簡称同倫羣的自然对应.

設 $f: X \to Y$ 为一个映象, 由 f 所引起的由 $\Pi_m(X)$ 到 $\Pi_n(Y)$ 的同态对应仍用 f 表示,即对 $\alpha \in \Pi_m(X)$ 規定 $f(\alpha) = f\alpha$.

从邏輯的观点看来,我們使用的符号是有一定的缺点的,但是它可以节省很多冗长的說明和符号,而且在本文中不会引起任何的誤会.

§2 Steenrod 乘方及其对偶运算

設 X 为一拓扑空間, 我們用 $\mathrm{St}^{2p-2}: H^n(X; Z_p), H^{n+2p-2}(X; Z_p)$ 表示在[8]中定义的运算 $\mathscr{P}'$, 我們用 $\mathrm{St}_{2p-2}: H_{n+2p-2}(X; Z_p) \to H_n(X; Z_p)$ 表示 St^{2p-2} 的对偶运算,即由下面

公式所确定的对偶运算。

对　$u\in H_{n+2p-2}(X;Z_p)$，$v\in H^n(X;Z_p)$，

$$\mathrm{St}_{2p-2}(u)\cdot v=u\cdot \mathrm{St}^{2p-2}(v),$$

这里表示上同調羣和同調羣的 Kronecker 乘积。

如果用 N 表示由整数羣到模 p 整数羣所引起的由 $H_*(X)$ 到 $H_*(X;Z_p)$ 的同态对应，运算

$$\mathrm{St}_{2p-2}N: H_{n+2p-2}(X)\to H_n(X;Z_p) \text{ 用 } \mathscr{S}t_{2p-2} \text{ 表示.}$$

下面的命題应該是早已知道的結果，但是作者从未見过它的正式叙述及証明，为了完备起見，这里給出一个証明。

命題 1. 設 $\alpha\in C(\Pi_{n+2p-3}(S^n),p)$，而且 $\alpha\neq 0$，E^{n+2p-2} 为一个边界用映象 α 与 S^n 迭合的 $n+2p-2$ 維腔胞，则 $\mathrm{St}^{2p-2}([S^n]^*)\neq 0$。

証. 先假定 n 为一奇数，和一般文献一样，我們用 $K(Z,n)$ 表示 n 維同倫羣为 Z 而其他同倫羣为零羣的 Eilenbierg-Maclane 空間，我們可以作一个由 E^{n+2p-2} 到 $K(Z,n)$ 的連續映象 f 使 f 引起一个由 $\Pi_n(E^{n+2p-2})=Z$ 到 $\Pi_n(K(Z,n))=Z$ 的同构对应，由于 $m>n$ 时，$\Pi_m(S^n)$ 是一个有限羣，而当 $n<m<n+4p-5$ 时 $m\neq n+2p-3$ 时，由[4]或[5]，$C(\Pi_m(S^n),p)=0$，当 $m=n+2p-3$ 时 $C(\Pi_m(S^n),p)\approx Z_p$，由 E^{n+2p-2} 的作法及 E^{n+2p-2}，S^n 的同倫羣的序列的恰当性，可以說明当 $n<m\leqslant n+2p-3$ 时，$C(\Pi(E^{n+2p-2}),p)=0$ 由于当 $m\neq n$ 时. $\Pi_m(K(Z,n))=0$，因此当 $n\leqslant m\leqslant n+2p-3$ 时，f 引起一个由 $\Pi_m(E^{n+2p-2})$ 到 $\Pi_m(K(Z,n))$ 的 C 同构对应，而当 $m=n+2p-2$ 时，f 引起一个由 $\Pi_m(E^{n+2p-2})$ 到 $\Pi_m(K(Z,n))$ 的 C 变上对应，由 Whitehead-Serre 定理(見[5])，当 $n\leqslant m\leqslant n+2p-3$ 时 f^* 是一些由 $H^m(K(Z,n);Z_p)$ 到 $H^m(E^{n+2p-2};Z_p)$ 的同构对应，当 $m=n+2p-2$ 时，则 f_*: $H^m(K(Z,n);Z_p)\to H^m(E^{n+2p-2};Z_p)$ 是一个一一的同态对应，設 $u\in H^n(K(Z,n))$ 而且 $f^*(u)=[S^n]^*$，则由[1]定理6，$\mathrm{St}^{2p-2}(u)\neq 0$，因此 $\mathrm{St}^{2p-2}([S^n]^*)=\mathrm{St}^{2p-2}(f^*(u))=f^*(\mathrm{St}^{2p-2}(u))\neq 0$.

如果 n 为一偶数，設 E^{n+2p-1} 为由 $E^{n+2p-2}\times(-1,1)$（$(-1,1)$ 表示以 -1, 1 为端点的閉区間）把 $E^{n+2p-2}\times\{-1\}$ 和 $E^{n+2p-2}\times\{1\}$ 分别迭合为两个不同的点的 $(n+2p-1)$ 維腔胞，設这个迭合映象为 I，我們可以假定 E^{n+2p-2} 中的点 x 与 E^{n+2p-1} 中的点 $I((x,0))$ 迭合，即 E^{n+2p-2} 与 $I(E^{n+2p-2}\times\{0\})$ 迭合.

設　$E_+^{n+2p-1}=I(E^{n+2p-2}\times(0,1))$,

$E_-^{n+2p-1}=I(E^{n+2p-2}\times(-1,0))$,

由于 $I(S^n\times(-1,1))$ 和一个 $(n+1)$ 維球拓扑同胚，$I(S^n\times(-1,1))$ 则用 S^{n+1} 表示，显然 $E^{n+2p-2}=E_+^{n+2p-1}\cap E_-^{n+2p-1}$.

和一般文献一样，我們用 E 表示由 $\Pi_m(S^n)$ 到 $\Pi_{m+1}(S^{n+1})$ 的同綫映象 (suspension)，则 E^{n+2p-1} 可以看为由边界用映象 $E(\alpha)$ 与 S^{n+1} 迭合的 $(n+2p-1)$ 維腔胞，则 $E(\alpha)\in C(\Pi_{n+2p-2}(S^{n+1}),p)$. 由[5]，$E(\alpha)\neq 0$，由于 $n+1$ 为奇数. 如果設 $\mathrm{St}^{2p-2}([S^{n+1}]^*)=$ $=k([E^{n+2p-1}]^*)$，则 $k\neq 0 \bmod p$.

設由 E^{n+2p-1} 到 $(E^{n+2p-1},E_+^{n+2p-1})$ 的包含映象为 j，由于 E_+^{n+2p-1} 可以压縮为一点，对任意 $m>0$，$j^*:H^*(E^{n+2p-1},E_+^{n+2p-1})\to H^m(E^{n+2p-1})$ 是一个同构对应. 設由 $(E_-^{n+2p-1},E^{n+2p-2})$

到$(E^{n+2p-1}, E_+^{n+2p-1})$的包含映象为$i$，则由可割性公理（axiom of excision），则对任意$m>0$，i^*: $H^m(E^{n+2p-1}, E_+^{n+2p-1}) \to H^m(E_-^{n+2p-1}, E^{n+2p-2})$是一个同构对应，設由$H^m(E^{n+2p-2}; Z_p)$到$H^{m+1}(E_-^{n+2p-1}, E^{n+2p-2}; Z_p)$的边緣运算为$\delta$，由于$E_-^{n+2p-1}$可以压縮为一点，$\delta$是一些同构对应，可以选$S^{n+1}$的定向（orientation）使$[S^{n+1}]^* = j^*(i^*)^{-1}\delta([S^n]^*)$，则$St^{2p-2}([S^{n+1}]^*) = St^{2p-2}j^*(i^*)^{-1}\delta([S^n]^*) = j^*(i^*)^{-1}\delta St^{2p-2}([S^n]^*)$，則$St^{2p-2}([S^n]^*) = = \delta^{-1}i^*(j^*)^{-1}St^{2p-2}([S^{n+1}]^*) = kS^{-1}i^*(j^*)^{-1}([E^{n+2p-1}]^*) = k[E^{n+2p-2}]^* \neq 0$.

（証毕）

命題1的对偶命題是$St_{2p-2}([E^{n+2p-2}]_*) \neq 0$，因而$\mathscr{S}t_{2p-2}([E^{n+2p-2}]^*) \neq 0$.

和[5]一样，我們用$S^n|t$表示这样一个$(n+1)$維腔胞，它的边界用一个Brouwer次数为t的映象与n維球S^n迭合，在[5]中已經証明，下列序列

$$0 \to \Pi_m(S^n) \otimes Z_t \to \Pi_m(S^n|t) \to \Pi_m(S^n) * Z_t \to 0$$

当$n \leqslant m \leqslant 2n-2$时是恰当的，这里$\otimes$表示羣的张量乘积，$*$表示羣的扭乘积．如果$t$是$p$的一个乘冪，而且$n+2p-2 \leqslant 2n-2$，則当$n<m<n+2p-3$时，$\Pi_m(S^n|t)=0$，$\Pi_{n+2p-3}(S^n|t) = Z_p$，$\Pi_{n+2p-2}(S^n|t) = Z_p$．設$i$为由$S^n$到$S^n|t$的包含映象，$\alpha \in C(\Pi_{n+2p-3}(S^n)\cdot p)$，而且$\alpha \neq 0$，則$i\alpha \in \Pi_{n+2p-3}(S^n|t)$，而且$i\alpha \neq 0$，利用映象$i$，我們很容易得到下面的命題．

命題2. 假定$n+2p-3 \leqslant 2n-2$，$\alpha \in \Pi_{n+2p-3}(S^n|t)$，而且$\alpha \neq 0$，$E^{n+2p-2}$为一个边界用映象$\alpha$与$(S^n|t)$迭合的$(n+2p-2)$維腔胞，則$St^{2p-2}([S^n]^*) \neq 0$.

命題2的对偶命題也是$St_{2p-2}([E^{n+2p-2}]_*) \neq 0$，因而$\mathscr{S}t_{2p-2}([E^{n+2p-2}]_*) \neq 0$.

命題3. 假定$n+2p-2 \leqslant 2n-2$，$\beta \in \Pi_{n+2p-2}(S^n|t)$，而且$\beta \neq 0$，$E^{n+2p-1}$是一个边界用映象$\beta$与$S^n|t$迭合的$n+2p-1$維腔胞，則$St^{2p-2}([S^n|\lambda]^*) \neq 0$.

証. 先将E^{n+2p-1}的子集S^n迭合为一点，設这个迭合映象为I．更設$I|(S^n|t) = J$，則$S^n|t$迭合为一个$(n+1)$維球面S^{n+1}，而E^{n+2p-1}則迭合为一个边界用映象$J\beta$与S^{n+1}迭合的$n+2p-1$維腔胞E_1^{n+2p-1}，利用[5]中的討論可以説明$J\beta \neq 0$，因此如果設$St^{2p-2}([S^{n+1}]^*) = k[E_1^{n+2p-1}]^*$，則$k \neq 0 \mod p$，則$St^{2p-2}([S^n|t]^*) = St^{2p-2}I^*([S^{n+1}]^*) = = I_* St^{2p-2}([S^{n+1}]^*) = I_*(k[E_1^{n+2p-1}]^*) = k[E^{n+2p-1}]^* \neq 0$．証毕．

命題3的对偶命題也是$St_{2p-2}([E^{n+2p-1}]_*) \neq 0$，因而$\mathscr{S}t_{2p-2}([E^{n+2p-1}]_*) \neq 0$.

§3 同倫羣的第二类自然对应

Steenrod在[9]中，利用恰当序列的同态对应，介紹了映象的一些上同調不变量，将他的方法对偶化，我們可以得出映象的一些同調不变量，利用这些同調不变量，我們就可以介紹同倫羣的第二类自然对应了．

設f: $Y \to X$为一連續映象，如果用X_f表示由f所引起的映象柱体[1]，和一般文献一

1) 我們可以假定$Y\times(0,1)$与X没有任何公共点，如果在$Y\times(0,1)\cup X$中，将$Y\times(0,1)$中的点$(y,1)$与X中的点$f(y)$迭合为一点，所得的空間称为f的映象柱体，我們用X_f表示它．設由$Y\times(0,1)\cup X$到X_f的迭合映象为I，一般总是把Y与X_f中的子集$I(Y\times\{0\})$看为同一空間，X与X_f中的$I(X)$看为同一个空間，即把Y和X都看为X_f的子集.

样，我們可以把 X 和 Y 都看成 X_f 的子集，設由 X，Y 到 X_f 的包含映象为 i，j，由 X_f 到 (X_f, Y) 的包含映象为 g，考虑下列图形

$$\begin{array}{ccccccccc} \to H_{m+1}(X_f) & \xrightarrow{g_*} & H_{m+1}(X_f, Y) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_m(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_m(X_f) \to \\ \downarrow \mathscr{S}t_{2p-2} & & \downarrow \mathscr{S}t_{2p-2} & & \downarrow \mathscr{S}t_{2p-2} & & \downarrow \mathscr{S}t_{2p-2} \\ \to H_{m-(2p-3)}(X_f; Z_p) & \to & H_{m-(2p-3)}(X_f, Y; Z_p) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_{m-(2p-2)}(Y; Z_p) & \to & H_{m-2p-2}(X_f; Z_p) \end{array}$$

設 $u \in H_m(Y)$，而且 $f_*(u)=0$，$\mathscr{S}t_{2p-2}(u)=0$．則用同調羣序列的恰当性，在 $H_{m+1}(X_f, Y)$ 中一定有一个 $v, v \in H_{m+1}(X_f, Y)$，使 $\partial(v)=u$，由于 $\partial\mathscr{S}t_{2p-2}(v)=\mathscr{S}t_{2p-2}(\partial v)=\mathscr{S}t_{2p-2}(u)=0$，在 $H_{m-(2p-3)}(X_f; Z_p)$ 中一定有一 w' 使 $g_*(w')=\mathscr{S}t_{2p-2}(u)$，由于 X_f 和 X 是同倫同胚的，i 是一个同倫等价对应，i_* 是同构对应，因此可以設 $i_*^{-1}(w')=w$，如果用 q 表示由 $H_{m-(2p-3)}(X; Z_p)$ 到商羣 $H_{m-(2p-3)}(X; Z_p)/f_*(H_{m-(2p-3)}(Y; Z_p) \dotplus \mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的同态对应（这里 $\dotplus$ 表示 $H_{m-(2p-3)}(X; Z_p)$ 中既包含子羣 $f_*(H_{m-(2p-3)}(Y_f; Z_p)$ 又包含子羣 $St_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的所有子羣的交)，在[9]中已經証明了，$q(w)$ 在

$$H_{m-(2p-3)}(X; Z_p)/f^*(H_{m-(2p-3)}(Y; Z_p) \dotplus \mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$$

中是唯一确定的，我們定义 $\bigcap\limits_{\substack{2p-2\\f}}(u)=q(w)$．在[6]中已經証明 $\bigcap\limits_{\substack{2p-2\\f}}$ 是一个由 $f_*^{-1}(0)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X; Z_p)/f_*(H_{m-(2p-3)}(Y; Z_p) \dotplus \mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的同态对应．

設 $f: Y \to X$，$g: Y' \to X'$，$\varphi: X \to X'$，$\psi: Y \to Y'$ 为适合条件 $\varphi f = g\psi$ 的一些映象，如果我們用 $\bar{\varphi}_*$ 表示由 φ 所引起的由

$$H_{m-(2p-3)}(X; Z_p)/f_*(H_{m-(2p-3)}(Y; Z_p) \dotplus \mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$$

到 $H_{m-(2p-3)}(X; Z_p)/g_*(H_{m-(2p-3)}(Y', Z_p) \dotplus \mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X'))$ 的同态对应，則我們很容易証明以下命題：

命題 4. 如果 $u \in H_m(Y)$，而且 $f_*(u)=0$，$\mathscr{S}t_{2p-2}(u)=0$，則 $g_*(\psi_*(u))=0$，$\mathscr{S}t_{2p-2}(\psi_*(u))=0$，而且 $\bar{\varphi}_*\left(\bigcap\limits_{\substack{2p-2\\f}}(u)\right)=\bigcap\limits_{\substack{2p-2\\f}}(\psi_*(u))$．

由此很容易說明如果 $f: Y \to X$，$g: X \to X$ 为一些連續映象，$u \in H_m(Y)$，而且 $f_*(u)=0$，則 $(gf)_*(u)=0$，而且 $\bigcap\limits_{\substack{2p-2\\f}}(u)=\bar{g}_*\left(\bigcap\limits_{\substack{2p-2\\f}}(u)\right)$．

如果 $Y=S^m$，$m>1$，$\alpha: S^m \to X$ 为 $\Pi_m(X)$ 的一个元素，而且 $\Phi_m(\alpha)=0$ 即 $\alpha_*([S^m]_*)=0$，由于 $\mathscr{S}t_{2p-2}([S^m])=0$，因此，我們可以定义 $\bigcap\limits_{\substack{2p-2\\\alpha}}([S^m]_*)$，我們得指出对任意 n，$g_*(H_n(S^m, Z_p))=0$，作由 $\Phi_m^{-1}(0)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}H_{m+1}(X)$ 的对应 Φ_m 如下：

对 $\alpha \in \Phi_m^{-1}(0)$，定义 $\Phi'_m(\alpha)=\bigcap\limits_{\substack{2p-2\\\alpha}}([S^m]_*)$．

这样对应我們称为同倫羣的模 p 的第二类自然对应．

設 $f: X \to Y$，$\alpha \in \Pi_m(X)$，而且 $\Phi_m(\alpha)=0$，則 $\Phi_m(f\alpha)=f_*\Phi_m(\alpha)=0$，利用命題 4，显然

$$\bar{f}_*\Phi'_m(\alpha)=\Phi'_m(f\alpha).$$

定理 1. 对应 $\Phi'_m:\Phi_m^{-1}(0)\to H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 是一个同态对应.

証. 設 $\alpha_1:S^m\to X$; $\alpha_2:S^m-X$ 为 $\Pi_m(X)$ 的两个元素, $\Phi_m(\alpha_1)=\Phi_m(\alpha_2)=0$, 則 $\Phi_m(\alpha_1+\alpha_2)=0$, 我們将証明: $\Phi'_m(\alpha_1+\alpha_2)=\Phi'_m(\alpha_1)+\Phi'_m(\alpha_2)$.

設 S_1^m, S_2^m 为任意两个 m 維球面, f_1, f_2 为任意两个分别由 S_1^m, S_2^m 到 S^m 的拓扑对应, 而且 $f_{1*}([S_1^m]_*)=[S^m]_*$, $f_{2*}([S_2^m]_*)=[S^m]_*$, 設 $\beta_1=\alpha_1 f_1$, $\beta_2=\alpha_2 f_2$, 我們可以假定 S_1^m 和 S_2^m 只有一个公共点 Q, 而且 $\beta_1(Q)=\beta_2(Q)$, 設 $Y=S_1^m\cup S_2^m$, 作由 Y 到 X 的变换 f 使当 $x\in S_1^m$ 时, $f(x)=\beta_1(x)$ 当 $x\in S_2^m$ 时, $f(x)=\beta_2(x)$. 很容易說明 f 是单値的而且是連續的, 設 τ_1, τ_2 为分别由 S_1^m, S_2^m 到 Y 的包含映象, 作由 S^m 到 Y 的包含映象 g 使在 $\Pi_m(Y)$ 中, $g=\tau_1\alpha_1^{-1}+\tau_2\alpha_2^{-1}$. 很容易說明 $fg=\alpha_1+\alpha_2$.

利用命題 4 及其推論,則

$$\Phi'_m(\alpha_1+\alpha_2)=\bigcap_{fg}^{2p-2}([S^m]_*)=\bigcap_{f}^{2p-2}(g_*([S^m]_*))=$$

$$=\bigcap_{f}^{2p-2}([S_1^m]_*+[S_2^m]_*)=\bigcap_{f}^{2p-2}([S_1^m]_*)+\bigcap_{f}^{2p-2}([S_2^m]_*)=$$

$$=\bigcap_{f\tau_1}^{2p-2}([S_1^m]_*)+\bigcap_{f\tau_2}^{2p-2}([S_2^m]_*)=\bigcap_{\beta_1}^{2p-2}([S_1^m]_*)+\bigcap_{\beta_2}^{2p-2}([S_2^m]_*)=$$

$$=\bigcap_{\beta_1}^{2p-2}(f_{1*}^{-1}([S^m]_*))+\bigcap_{\beta_2}^{2p-2}(f_{2*}^{-1}[S^m]_*)=$$

$$=\bigcap_{\beta_1 f_1^{-1}}^{2p-2}([S^m]_*)+\bigcap_{\beta_2 f_2^{-1}}^{2p-2}([S^m]_*)=$$

$$=\bigcap_{\alpha_1}^{2p-2}([S^m]_*)+\bigcap_{\alpha_2}^{2p-2}([S^m]_*)=\Phi'_m(\alpha_1)+\Phi'_m(\alpha_2).$$

(証毕)

$\Phi'_m(\alpha)$ 还可以用另外的方式去定义, 如果 $\Phi_m(\alpha)=0$, 則我們可以在 X 上迭合一个 $(m+1)$ 維腔胞 E^{m+1}, 使由 E^{m+1} 的边界到 X 的映象为 α, 而 E^{m+1} 的内部与 X 則是互質的,所得的空間为 $X\cup E^{m+1}$, 考虑下列同調羣的 Mayer-Vietoris 序列

$$H_{n+1}(X)\xrightarrow{\alpha_*}H_{n+1}(X\cup E^{m+1})\xrightarrow{\triangle}H_n(S^m)\xrightarrow{\alpha_*}H_n(X)\to\cdots$$

这里 i 表示由 X 到 $X\cup E^{m+1}$ 的包含映象,由于当 $m\neq n$ 时, $H_n(S^m)=0$,而当 $n=m$ 时, $\alpha_*([S^m]_*)=0$, $\alpha_*(H_m(S^n))=0$,因此当 $n\neq m+1$ 时, $i_*:H_n(X)\to H_n(X\cup E^{m+1})$ 是一些同构对应,而 E^{m+1} 則是 $X\cup E^{m+1}$ 中不同調于零的一个循环,和前面一样,如果我們用 q 表示由 $H_n(X;Z_p)$ 到 $H_n(X;Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+(2p-2)}(X))$ 的同态对应,則我們有以下命題.

命题 5. $\Phi'(\alpha)=qi_*^{-1}\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}([E^{m+1}]_*)$.

証. 只要注意在 X_α(由映象 $\alpha:S^m\to X$ 所作出的映象柱体)中,如果把子集 S^m 迭合为一点,則 $I(S^m\times(0,1))$(I 的意义見註 1) 迭合为一个边界用映象 α 与 X 迭合的 $(m+1)$ 維腔胞 E^{m+1}, 因而引起一个由恰当序列

$$\to H_{n+1}(S^m) \to H_{n+1}(X_\alpha) \to H_{n+1}(X_\alpha, S^n) \to H_n(S^m) \to \cdots$$

到恰当序列

$$\to H_{n+1}(S^m) \to H_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X \cup E^{m+1}) \to H_n(S^m) \to \cdots$$

的同构对应，利用这些同构对应，我們的命题就可以很快地得到証明.

在以后的討論里，我們始終假定 n 为一个适合条件 $n + 2p - 3 \leqslant 2n - 2$ 的正整数，我們更用 K 表示整数 $\min(2n-1, n+4p-5)$，由于当 $m > n$ 时，$H_m(S^n) = 0$，因此 $\Phi_m^{-1}(0) = \Pi_m(S^m)$，則我們有以下的命題.

命題 6. 当 $n < m < K$ 时，Φ'_m 是一个由 $\Pi_m(S^n)$ 到 $H_m(S^n; Z_p)$ 的 C 同构对应.

由于当 $n < m < K$，而 $K \leqslant 2n - 1$，因此 $\Pi_m(S^n)$ 是一个有限羣，利用 §1 的說明．命題 6 相当于下列命題.

命題 6′. Φ'_m 引起一些由 $C(\Pi_m(S^n); p)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(S^n; Z_p)$ 的同构对应.

証. 由[4]或[5]当 $n < m < K$，而 $m \neq n + 2p - 3$ 时，$C(\Pi_m(S^n); p) = 0$，显然 $H_{m-(2p-3)}(S^n; Z_p) = 0$；因而 Φ'_m 一定是一个由 $\Pi_m(S^n)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(S^n; Z_p)$ 的 C 同构对应.

当 $m = n + 2p - 3$，則 $C(\Pi_m(S^n); p)) \approx Z_p$，而 $H_{m-(2p-3)}(S^n, Z_p) = H_n(S^n, Z_p) \approx \approx Z_p$，要証明 Φ'_m 是一个 C 同构对应，只要証明：当 $\alpha \in C(\Pi_{n+2p-3}(S^n); Z_p)$，$\alpha \neq 0$ 时，$\Phi'_{n+2p-3}(\alpha) \neq 0$ 即可，設 E^{n+2p-2} 为一个边界用映象 α 与 S^n 迭合的 $n + 2p - 2$ 維腔胞，在命題(1)里已經說明，$\mathscr{S}t_{2p-2}([E^{n+2p-2}]_*) \neq 0$，則 $\Phi'_{n+2p-3}(\alpha) = i_*^{-1}\mathscr{S}t_{2p-2}([E^{n+2p-2}]^*) \neq 0$.

（証毕）

設 t 为 p 的任何一个正数次乘冪，在[5]中已經說明，当 $n < m < K$，$m \neq n + 2p - - 3$，$n + 2p - 2$ 时，$C(\Pi_m(S^n|t), p) \approx Z_p$，利用 $S^n|t$ 的同調羣和命題(2)，(3)，(5)及和上面的命題类似的办法，我們可以得到下面的命題：

命題 7. 当 $n < m < K$ 时，Φ'_m 是一些由 $\Pi_m(S^n|t)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(S^n|t; Z_p)$ 的 C 同构对应.

普通 n 維球 S^n 我們可以用 $S^n|0$ 表示，則命題(7)和(8)可以下面的命題統一起来.

命題 8. 不論 t 是零或者 p 的一个整数次乘冪，則当 $n < m < K$ 时，Φ'_m 是一个由 $\Pi_m(S^n|t)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(S^n|t, Z_p)$ 的 C 同构对应.

我們也可以很容易說明：即使当 t 是一个普通的正整数，上面的結論仍然是正确的.

§4　同調羣的上边緣运算

为了說明同倫羣的 p 分量羣的构造，我們介紹同調羣的上边緣运算.

設 l 为任一整数，和一般文献一样，我們用 ${}_lA$ 表示交換羣 A 中所有使 $lx = 0$ 的元素 x 所成的子羣.

設 X 为一拓扑空間，我們用 $C_n(X; A)$ 表示 X 的所有 n 維連續单形以 A 为系数时所成的鏈羣，$C_n(X)$ 則表示以整数羣为系数羣的鏈羣. $Z_n(X; A)$，$Z_n(X)$ 則分別表示以 A 及整数羣的 n 維循环羣.

同前面一样，我們用 t 表示 p 的一个乘冪，則对 $u \in {}_tH_m(X)$，設 w 为 u 所包含的一个循环，由于 $tu = 0$，則 $tw \sim 0$，因此一定有一个 $n + 1$ 維鏈 v 存在使 $\partial(v) = tw$，因为 $t = 0 \bmod p$，則 v 可以看为 $Z_{m+1}(X; Z_p)$ 中的一个循环，設 w' 为 u 中的另一个循环，v' 为

任何一个适合条件 $\partial(v')=tw'$ 的 $m+1$ 維鍊，由于 $w\sim w'$，一定有鍊 $x\in C_{m+1}(X)$ 使 $\partial(x)=w-w'$，則

$$\partial(v-v'-tx)=tw-tw'-t(w-w')=0,$$

則 $v-v'-tx\in Z_{m+1}(X)$，如果 N 表示整数羣模 p 所引起的由 $H_{m+1}(X)$ 到 $H_{m+1}(X;Z_p)$ 的同态对应，v_*，v'_* 和 $(v-v'-tx)_*$ 分别表示它們所在的同調类，則 $v_*-v'_*=$ $=N((v-v'-tx)_*)$ 如果用 M 表示由 $H_{m+1}(X;Z_p)$ 到商羣 $H_{m+1}(X;Z_p)/N(H_{m+1}(X))$ 的同态对应，由上面的說明，在 $H_{m+1}(X;Z_p)/N(H_{m+1}(X))$ 中，$M((v)_*)$ 与 w，v 的选择无关，而是由 u 唯一确定的，我們定义 $\delta_t(u)=M((v)_*)$，显然 δ_t 是一个由 ${}_tH_m(X)$ 到 $H_{m+1}(X;Z_p)/N(H_{m+1}(X))$ 的同态对应. δ_t 称为同調羣的上边緣运算.

如果 p^τ 是 u 的次数，可以說明当 $\tau'>\tau$ 时，$\delta_p\tau'(u)=0$ 而 $\delta_p\tau(u)\neq 0$.

設 $f:X\to Y$ 为一連續映象，如果我們用 $\bar{f}_*$ 表示由 f 所引起的由 $H_{m+1}(X;Z_p)/N(H_{m+1}(X))$ 到 $H_{m+1}(Y;Z_p)/N(H_{m+1}(Y))$ 的同态对应，則我們很容易証明下面的命題.

命題 9. 如果 $u\in{}_tH_m(X)$，則 $f_*(u)\in{}_tH_m(Y)$，而且 $\bar{f}_*(\delta_t(u))=\delta_t(f_*(u))$.

如果 X 是一个多面体，L 是 X 的任意一个腔胞分解，我們在上面定义上边緣运算时所用到的連續单形鏈羣 $C_m(X;A)$ 全部可以用腔胞鏈羣 $C_m(L;A)$ 去代替.

設 $X_1\subset X$，对于相对同調羣 $H_m(X_1,X)$ 的子羣，${}_tH_m(X_1;X)$，我們也可以类似地定义上边緣运算 δ_t，而且也有和命題(9)类似的性質.

§5 主要結果

設 n 为一个适合条件 $n+2p-3\leqslant 2n-2$ 的正整数，在 §6, §7, §8 里，我們假定所考虑的空間又适合下列条件:

(a) X 是单連通的，

(b) 当 $1<m<n$ 时，$H_m(X;Z_p)=0$;

和前面一样，我們用 K 表示正整数 $\min(2n-1,\ n+4p-5)$，和一般文献一样，設 $\alpha\in\Pi_m(X)$，$\Phi_m(\alpha)$ 称为 X 的一个球面元素，則我們有下面的結果.

定理 2. 設 m 为任何一个适合条件 $n+2p-3<m<K$ 的正整数，$u\in C(H_m(X),p)$，則 u 是一个球面元素的充分必要条件是 $\mathscr{S}t_{2p-2}(u)=0$.

設 $\Phi_m(\alpha)=u$，因为 X 是 $(n-1)$ 維 C 連通的，由[2]定理 2，$\Phi_m^{-1}(0)$ 是一个有限羣，因而 α 是一个有限次元素，利用 $\Pi_m(X)$ 的分解，可以說明: α 可以写作 $\alpha_1+\alpha_2$，其中 α_1 的次数是 p 的一个乘冪 p^τ（τ 可能为零），而 α_2 的次数則与 p 是互質的，由于 $p^\tau\alpha_1=0$，$p^\tau\Phi_m(\alpha_1)=\Phi_m(p^\tau\alpha_1)=0$，因此 $\Phi_m(\alpha_1)$ 在 $C(H_m(X),p)$ 中，設 α_2 的次数为 λ，則 $\lambda\Phi_m(\alpha_2)=\Phi_m(\lambda\alpha_2)=0$，但 $\Phi_m(\alpha_2)=\Phi_m(\alpha-\alpha_1)=\Phi_m(\alpha)-\Phi_m(\alpha_1)$，因而 $\Phi_m(\alpha_2)$ 也在 $C(H_m(X),p)$ 中，按照 p 分量羣 $C(H_m(X),p)$ 的定义，$\Phi(\alpha_2)$ 的次数一定是 p 的整数次乘冪，按照 $\lambda\Phi_m(\alpha_2)=0$，則 $\Phi_m(\alpha_2)$ 的次数是 λ 的因子，由于 λ 与 p 是互質的，所以 $\Phi_m(\alpha_2)$ 的次数等于 1，因而 $\Phi_m(\alpha_2)=0$，因此 $\Phi_m(\alpha_1)=\Phi_m(\alpha)-\Phi_m(\alpha_2)=$ $=\Phi_m(\alpha)=u$，这样我們得到与定理 2 等价的下列推理:

推理. 当 $n+2p-3<m<K$ 时，$\Phi_m(C(\Pi_m(X)),p)=C(H_m(X);p)\cap\mathscr{S}t_{2p-2}^{-1}(0)$. 这里的 $\cap$ 表示集的交.

定理 3. 当 $n+2p-3\leqslant m<K$ 时，Φ'_m 是一个由 $\Phi_m^{-1}(0)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的 C 同构对应.

由[2]定理 2，$\Phi_m^{-1}(0)$ 是一个有限羣，利用 §1 的說明，定理 3 相当于下列推理:

推理. 当 $n+2p-3\leqslant m<K$ 时，Φ'_m 引起一些由 $\Phi_m^{-1}(0)\cap C(\Pi_m(X),p)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的同构对应.

很容易說明：$\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}$ 引起一个由 $H_{m+1}(X,Z_p)/N(H_{m+1}(X))$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的同态对应，这个对应用 $\overline{\mathscr{S}}\mathrm{t}_{2p-2}$ 表示. 则我們有下面的定理.

定理 4. 設 $n+2p-3\leqslant m<K$，$\alpha\in C(\Pi_m(X),p)$，$\Phi_m(\alpha)=u$，u 的次数为 t (p 的乘幂)，则

(a) $\Phi_m(t\alpha)=0$,

(b) $\Phi'_m(t\alpha)=\overline{\mathscr{S}}\mathrm{t}_{2p-2}(\delta_t(u))$.

定理 2 和 3 說明；$\Pi_m(X)$ 的 p 分量羣 $C(\Pi_m(X),p)$ 是羣 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 被羣 $C'(H_m(X),p)\cap\overline{\mathscr{S}}\mathrm{t}_{2p-2}^{-1}(0)$ 的扩充，而定理 4 則說明这个扩充的代数构造，这样 $\Pi_m(X)$ 的 p 分量羣 $C(\Pi_m(X),p)$ 就完全确定了.

实际上，定理 4 的結論当 $m>n+2p-3$ 时都是正确的. 由于本文并不需要，这里就不介紹了.

我們将在 §7 給出定理 2,3,4 的証明.

§6　多面体 P 的作法

由于 X 是 $(n-1)$ 維 C 連通的，由 [2] 定理 2，当 $n\leqslant M<n+2p-3$ 时，Φ_M: $\Pi_M(X)\to H_M(X)$ 是一些 C 同构对应，当 $M=n+2p-3$ 时，Φ_M 則是 C 变上的（即 $H_m(X)/\Phi_m(\Pi_m(X))\in C$），因此当 $n\leqslant M\leqslant n+2p-3$ 时，我們可以选择 $\Pi_M(X)$ 的一組元素 $\alpha_1^M\cdots\overset{M}{\alpha l_M}$，使滿足下列条件:

(a) 当 $n\leqslant M<n+2p-3$ 时，$\alpha_1^M\cdots\overset{M}{\alpha l_M}$ 为 $\Pi_m(X)$ 的一組 C 基底;

(b) 当 $n\leqslant M\leqslant n+2p-3$ 时，$\Phi_M(\alpha_1^M),\cdots,\Phi_M(\overset{M}{\alpha l_M})$ 为 $H_M(X)$ 的一組 C 基底;

(c) 当 $n\leqslant M<n+2p-3$ 时，$1\leqslant k\leqslant l_M$ 时，α_k^M 和 $\Phi_M(\alpha_k^M)$ 具有相同的次数.

为了說明方便起見，我們可以假定每一个 α_k^M 是一个由 M 維球面 S_k^M 到 X 的映象，当 $k\neq i$ 时 S_k^M 和 S_i^M 是不同的球面，如果 α_k^M 是一个自由元素，則取 t_k^M 为零，如果 α_k^M 是一个有限次元素，則取 t_k^M 为 α_k^M 的次数，則 α_k^M 可以扩充为一个由 $S_k^M\mid t_k^M$ 到 X 的映象 β_k^M（这里 $S^m\mid 0$ 表示 m 維球 S^m），当 $n\leqslant M\leqslant n+2p-3$，$1\leqslant k\leqslant l_M$ 时，可以假定所有的 $(S_k^M|t_k^M)$ 相互間只有一个公共点 Q，而且 $\beta_1^n(Q)=\beta_2^n(Q)=\cdots=\beta_{l_{n+2p-3}}^{n+2p-3}(Q)$，設

$$P=\sum_{M=n}^{n+2p-3}\left(\sum_{k=1}^{l_M}(S_k^M|t_k^M)\right),$$

作由 P 到 X 的映象 f 如下:

$$f(x)=\beta_k^M(x)\quad 当\ x\in S_k^M|t_k^M\ 时,$$

則 f 按照作法是单値的，而且是連續的.

利用 $H_M(P)=\sum_{k=1}^{l_m} H_M(S_k^M|t_k^M)$，因此 $[S_1^M]_*\cdots[S_{l_M}^M]_*$ 組成 $H_M(P)$ 的一組基底，由于 $\Phi_M(\alpha_k^M)=\alpha_k^M([S_k^M]_*)=f_*([S_k^M]_*)$，利用条件 (a),(b),(c) 及 §1 的一些說明，我們馬上可以得到下面的命題.

命題 10. (a) 当 $1\leqslant M<n+2p-3$ 时，$f_*:H_m(P)\to H_M(X)$ 是一些 C 同构对应.

(b) 当 $M=n+2p-3$ 时，$f_*:H_M(P)\to H_M(X)$ 是 C 变上的.

利用每一个 $S_k^M|t_k^M$ 至少是 $(n-1)$ 維連通的，而且相互間只有一个公共点，因此当 $n\leqslant m\leqslant 2n-2$ 时，$\Pi_m(P)=\sum_{M=n}^{n+2p-3}\left(\sum_{k=1}^{l_M}\Pi_m(S_k^M|t_k^M)\right)$，利用命題 8，我們馬上可以得到下面的命題.

命題 12. 当 $n<m<k$ 时，$\Phi'_m:\Phi_m^{-1}(0)\to H_{m-(2p-3)}(P;Z_p)$ 是一些 C 同构对应.

我們得指出，当 $m>n+2p-3$ 时，$H_m(P)=0$，因而 $\Phi_m^{-1}(0)=\Pi_m(P)$，所以当 $n+2p-3<m<K$ 时，Φ'_m 是一些由 $\Pi_m(P)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(P;Z_p)$ 的 C 同构对应.

我們作出 f 的映象柱体 X_f，則 P 可以看为 X_f 的子集，由于 X_f 与 X 是同倫同胚的，而我們所考慮的又是同倫性質，我們可以把 X_f 和 X 看成同样的空間，因而可以把 P 看成 X 的子集，f 可以看成由 P 到 X 的包含映象，設 g 为由 X 到 (X,P) 的包含映象，利用下列同調序列的恰当性：

$$\cdots\to H_m(P)\xrightarrow{f_*}H_m(X)\xrightarrow{g_*}H_m(X,P)\xrightarrow{\partial}H_{m-1}(P)\to\cdots$$ 及当 $m>n+2p-3$ 时，$H_m(P)=0$，再利用命題(10)，我們馬上得到下面的命題：

命題 13. (a) $1\leqslant m<n+2p-3$ 时，$H_m(X,P)\subset C$；

(b) 当 $m>n+2p-2$ 时，$g_*:H_m(X)\to H_m(X,P)$

是一些同构对应，当 $m=n+2p-2$ 时，g_* 則是一一的.

命題 14. 假定 $n+2p-2\leqslant m<K$，$u\in H_m(X)$，如果有一元素 $\alpha\in\Pi_m(X,P)$ 使 $\Phi_m(\alpha)=g_*(u)$，則

(a) $\Phi_{m-1}(\triangle(\alpha))=0$；

(b) $f_*\Phi'_{m-1}(\triangle(\alpha))=\mathscr{S}t_{2p-2}(u)$；

这里 $\triangle$ 表示由 $\Pi_m(X,P)$ 到 $\Pi_{m-1}(P)$ 的边緣运算.

証. (a) 当 $n+2p-2\leqslant m$ 时，由 $\Phi_m(\triangle(\alpha))=\partial\Phi_m(\alpha)=\partial g_*(u)$，利用同調羣序列的恰当性，显然 $\Phi_{m-1}(\triangle(\alpha))=0$.

(b) 設 α 为空間对 (E^m, S^{m-1}) 到 (X, P) 的映象，其中 E^m 为球面 S^{m-1} 所围成的一个 m 維腔胞，設 $\beta=\triangle(\alpha)$，即 $\alpha|S^{m-1}=\beta$，則 β 是一个由 S^{m-1} 到 P 的映象，再設 P' 为一个和 P 拓扑同胚的多面体，h 为一个由 P' 到 P 的拓扑对应，P' 中和 $S_k^M|t_k^M$ 对应的集用 $S_k'^M|t_k^M$ 表示，而且 $h_*([S_k'^M]_*)=[S_k^M]_*$，設 $f'=fh$，則 f' 是一个由 P' 到 X 的映象，我們假定 E^m 的边界用映象 $h^{-1}\beta$ 与 P' 迭合，而 E^m 的內点固定不动，所得的多面体以 $P'\cup E^m$ 表示，設由 P' 到 $P'\cup E^m$ 的包含映象为 j，作由 $P'\cup E^m$ 到 X 的映象 F 如下：

$$F(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{当 } x \in P', \\ \alpha(x) & \text{当 } x \in E^m; \end{cases}$$

利用 $P' \cup E^m$ 的作法，显然 F 是单值的而且是連續的。利用 $\Phi_m(\alpha) = g_*(u)$ 及 F 的作法，我們可以說明 $F_*([E^m]_*) = u$.

由命題 3. $\mathscr{S}t_{2p-2}([E^m]_*) = j_* \Phi'_{m-1}(h^{-1}\beta)$，則 $\mathscr{S}t_{2p-2}(u) = \mathscr{S}t_{2p-2} F_*([E^m]_*) = F_* \mathscr{S}t_{2p-2}([E^m]_*) = F_* j_* \Phi'_{m-1}(h^{-1}\beta) = f_* h_* \Phi'_{m-1}(h^{-1}\beta) = f_* \Phi'_{m-1}(\beta) = f_* \Phi'_{m-1}(\triangle(\alpha))$.

（証毕）

利用 $\Phi_m: \Pi_m(X,P) \to H_m(X,P)$ 是一个 C 同构对应。因而 Φ_m 引起一个由 $C(\Pi_m(X), p)$ 到 $C(H_m(X), p)$ 的同构对应，因而我們很容易得出下列推理。

推理 1. 如果 $n + 2p - 2 \leqslant m < K$, $u \in C(H_m(X), p)$. 則一定有一 $\alpha \in C(\Pi_m(X), p)$ 使

(a) $\Phi_m(\alpha) = g_*(u)$,

(b) $\Phi_{m-1}(\triangle(\alpha)) = 0$,

(c) $f_* \Phi'_{m-1}(\triangle(\alpha)) = \mathscr{S}t_{2p-2}(u)$.

推理 2. 如果 $n + 2p - 2 \leqslant m < K$, $u \in H_m(X)$, 則一定有一整数 t 和一个 α, $\alpha \in \Pi_m(X,P)$, 使

(a) $t = 1 \bmod p$,

(b) $\Phi_m(\alpha) = t g_*(u)$,

(c) $\Phi_m(\triangle(\alpha)) = 0$,

(d) $f_* \Phi'_{m-1}(\triangle(\alpha)) = \mathscr{S}t_{2p-2}(u)$.

証. 由于 $\Phi_m: \Pi_m(X,P) \to H_m(X,P)$ 是一个 C 同构对应，按照 C 的定义，一定有一个不含有因子 p 的整数 t_1, 使 $t_1 g_*(u) \in \Phi_m(\Pi_m(X,p))$, 因而一定有一个 α_1, $\alpha_1 \in \Pi_m(X, P)$ 使 $\Phi_m(\alpha_1) = t_1 g_*(u)$, 由于 p 是一个素数，而 t_1 不含有因子 p, 因此一定有两个整数 S_1, S_2 使 $S_2 p + S_1 t_1 = 1$, 設 $t = S_1 t_1$, $\alpha = S_1 \alpha_1$, 显然 $t = 1 \bmod p$, 而且 $\Phi_m(\alpha) = \Phi_m(S_1 \alpha_1) = S_1 \Phi_m(\alpha_1) = S_1 t_1 g_*(u) = t g_*(u)$, $\Phi_{m-1}(\triangle(\alpha)) = 0$. 这样 (a), (b), (c) 显然成立。

利用 $t = 1 \bmod p$, 而 $\mathscr{S}t_{2p-2}$ 的值域中的每一个元素的次数等于 p, 因而 $\mathscr{S}t_{2p-2}((t-1)u) = 0$, 即 $\mathscr{S}t_{2p-2} tu = \mathscr{S}t_{2p-2} u$, 由命題 14, 我們有 $\mathscr{S}t_{2p-2}(u) = \mathscr{S}t_{2p-2} tu = \Phi'_{m-1}(\triangle(\alpha))$. 这样，(d) 也得到了証明。

（証毕）

§7　定理 2、3、4 的証明

定理 2 的証明：必要性是明显的，只証充分性，如果 $u \in C(H_m(X), p)$ 而且 $\mathscr{S}t_{2p-2}(u) = 0$, 利用命題 14 的推理 1, 一定有一 α', $\alpha' \in C(\Pi_m(X, P), p)$ 使 $\Phi_m(\alpha') = g_*(u)$, 則 $f_* \Phi'(\triangle(\alpha')) = \mathscr{S}t_{2p-2}(u) = 0$, 由于 $K \leqslant n + 4p - 5$, $m - (2p - 2) < n + 2p - 3$, 因而 $f_*: H_{m-(2p-2)}(P) \to H_{m-(2p-2)}(X)$ 是一些 C 同构对应。因此 $\Phi'_{m-1}(\triangle(\alpha)) = 0$, 由命題(1), 对 P 来說 Φ'_{m-1} 是一个 C 同构对应，而 $\triangle(\alpha') \in C(\Pi_m(P), p)$, 所以 $\triangle(\alpha') = 0$, 按照空間对 (X,P) 的同倫序列的恰当性，一定有一个元素 $\alpha \in \Pi_m(X)$ 使 $g(\alpha) = \alpha'$, 則 $g_* \Phi_m(\alpha) = \Phi_m(g\alpha) = \Phi_m(\alpha') = g_*(u)$, 由于当 $m > n + 2p - 3$ 时, $g_*: H_m(X) \to H_m(X,P)$ 是

一一的，所以 $\Phi_m(\alpha)=u$，即 u 是一个球面元素.

（証毕）

定理 3 的証明：由于 $\Phi_m^{-1}(0)$ 和 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 都是有限羣，我們只要証明 Φ'_m 引起一个由 $C(\Phi_m^{-1}(0),p)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的同构对应即可.

对于任意 $u\in H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)$，由命題(10)，在 $H_{m-(2p-3)}(P,Z_p)$ 中一定有一个 v 使 $f_*(v)=u$，对 $\Pi_m(P)$ 来說应用命題 12，在 $C(\Phi_m^{-1}(0),p)$ 中一定有一个 α 使 $\Phi'_m(\alpha)=v$，則 $\Phi_m(f\alpha)=f_*\Phi_m(\alpha)=0$，而且 $\Phi'_m(f\alpha)=\bar{f}_*\Phi'_m(\alpha)=\bar{f}_*(v)=\bar{u}$. 这里 $\bar{f}_*$ 表示由 f 所引起的由 $H_{m-(2p-3)}(P;Z_p)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的同态对应，而 $\bar{u}$ 表示 u 在 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 中所属的剩余类，由于在 $\Pi_m(P)$ 中 $\alpha\in C(\Phi_m^{-1}(0),p)$ 因此，在 $\Pi_m(X)$ 中 $f\alpha\in C(\Phi_m^{-1}(0),p)$，因而在 X 中 $\Phi'_m(C(\Phi_m^{-1}(0),p))=$ $=H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$.

对于 $\Pi_m(X)$ 中的元素 γ，如果 $\gamma\in C(\Phi_m^{-1}(0),p)$，而且 $\Phi'_m(\gamma)=0$，我們将証明 $\gamma=0$.

考虑下列图形：

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_m(P) & \xrightarrow{f} & \Pi_m(X) & \xrightarrow{g} & \Pi_m(X,P) \\ & & \downarrow \Phi_m & & \downarrow \Phi_m \\ & & H_m(X) & \xrightarrow[g_*]{} & H_m(X,P) \end{array}$$

由于 $\Phi_m(\gamma)=0$，因而 $\Phi_m(g\gamma)=g_*(\Phi_m(\gamma))=0$，对 $\Pi_m(X,P)$ 来說，Φ_m 是一个 C 同构对应，由于 $g(\gamma)\in C(\Pi_m(X,P),p)$，所以 $g(\gamma)=0$，利用同倫羣序列的恰当性，在 $\Pi_m(P)$ 中一定有一 β 使 $f(\beta)=\gamma$.

另一方面，$\Phi'_m(\gamma)=\Phi'_m(f\beta)=\bar{f}_*\Phi'_m(\beta)=0$，即 $f_*\Phi'_m(\beta)\in\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$，設 $u\in H_{m+1}(X)$，而且 $\mathscr{S}t_{2p-2}(u)=f_*\Phi'_m(\beta)$.

利用命題 14 的推理 2 及其上面的一些説明，一定有一个 $\alpha\in\Pi_m(X,P)$ 和一个整数 t，使 $\Phi_{m+1}(\alpha)=tg_*(u)$，$t\equiv1 \bmod p$，而且 $\Phi_m(\Delta(\alpha))=0$，$f_*\Phi'_m(\Delta(\alpha))=\mathscr{S}t_{2p-2}(u)=$ $=f_*\Phi'_m(\beta)$. 因为 $f_*\Phi'_m$ 是由 $\Pi_m(P)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X,Z_p)$ 的 C 同构对应，因而 $\Delta(\alpha)-\beta$ 的次数是一个与 p 互質的整数，由于 $\gamma=f(\beta-\Delta(\alpha))=f(\beta)$，因而 γ 的次数也与 p 互質，但是 $\gamma\in C(\Pi_m(X),p)$，因而 $\gamma=f(\Delta(\alpha))=0$.

这样，我們就証明了 Φ'_m 引起一个由 $C(\Phi_m^{-1}(0),p)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的同构对应，即 Φ'_m 是一个由 $\Phi_m^{-1}(0)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X))$ 的 C 同构对应.

定理 4 的証明：考虑下列图形

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_m(P) & \xrightarrow{f} & \Pi_m(X) & \xrightarrow{g} & \Pi_m(X,P) \\ & & \Phi_m \downarrow & & \downarrow \Phi_m \\ & & H_m(X) & \xrightarrow{g_*} & H_m(X,P) \end{array}$$

由于 $t\alpha\in C(\Pi_m(X),p)$，而且 $\Phi_m(t\alpha)=t\Phi_m(\alpha)=tu=0$，則 $\Phi_m(g(t\alpha))=g_*\Phi_m(t\alpha)=0$，

对 $\Pi_m(X, P)$ 来説 Φ_m 是一个 C 同构对应，因而 $g(t\alpha)=0$，因此一定有一个 $\beta\in C(\Pi_m(P), p)$ 使 $f\beta=t\alpha$.

和命題 13 的証明一样，設 P' 为任何一个和 P 拓扑同胚的多面体，由 P' 到 P 的拓扑对应用 h 表示，P' 中和 $S_k^M|t_k^M$ 对应的集用 $S_k'^M|t_k'^M$ 表示，假定 α 是由 S^m 到 X 的一个映象，可以假定，P' 和 S^m 只有一个公共点 Q，而且 $h(Q)=\alpha(Q)$，設 $\Sigma=P'\cup S^m$，設 $\varepsilon\in\Pi_m(S^m)$ 表示由 S^m 到 S^m 的恆等映象，E^{m+1} 为一个边緣用映象 $t\varepsilon-h^{-1}\beta$ 与 Σ 迭合而内点則保持不动的 $m+1$ 維腔胞，設 $\Sigma_1=\Sigma\cup E^{m+1}$，由于 $\Phi_m(t\varepsilon-h^{-1}\beta)=t\Phi_m(\varepsilon)-\Phi_m(h^{-1}\beta)=t\Phi_m(\varepsilon)-(h^{-1}),\Phi_m(\beta)=t[S^m]_*$，所以在腔胞复形 Σ_1 中，

$$\partial(E^{m+1})=tS^m, \text{即 } \delta_t([S^m]_*)=[E^{m+1}]_*. \tag{1}$$

設由 P' 到 Σ_1 的包含映象为 j，我們将証明在 Σ_1 中

$$\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}([E^{m+1}]_*)=j_*\Phi_m'(h^{-1}\beta). \tag{2}$$

如果在 Σ_1 中，把 S^m 迭合为一点，其他部分則固定不动，設所得多面体为 Σ_2，迭合映象为 I，P' 所迭合成的多面体仍用 P' 表示，則 P' 到 Σ_2 的包含映象为 Ij，E^{m+1} 迭合成为一个边界用映象 $Ijh^{-1}\beta$ 与 P' 迭合的 $(m+1)$ 維腔胞 E_1^{m+1}，因此在多面体 P' 中

$$\Phi_m'(h^{-1}\beta)=(Ij)_*^{-1}\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}([E_1^{m+1}]_*),$$

即在多面体 Σ_2 中

$$\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(E_1^{m+1})=(Ij)_*\Phi_m'(h^{-1}\beta),$$

对于任意 l, lm, $I_*: H_l(\Sigma_1; Z_p)\to H_l(\Sigma_2; Z_p)$ 是一些同构对应，因此 I_* 的逆对应 I_*^{-1} 存在，对上式两端施以对应 I_*^{-1}，即可得出(2)式.

由(1)和(2)，可以推出

$$\overline{\mathscr{S}}\mathrm{t}_{2p-2}(\delta_t[S^m]_*)=j_*\Phi_m'(h^{-1}\beta). \tag{3}$$

作由 Σ 到 X 的映象 F 如下

$$F(x)=\begin{cases}\alpha(x) & \text{当 } x\in S^m \text{ 时}\\ h(x) & \text{当 } x\in P' \text{ 时}\end{cases}$$

显然 F 是单值的，而且是連續的.

由于在 X 中，$F(t\varepsilon-h^{-1}\beta)=t\alpha-\beta=0$，所以，$F$ 可以扩充为一个由 Σ_1 到 X 的映象 F_1，对(3)式两端施以 F_1 所引起的同态对应，即得

$$\overline{\mathscr{S}}\mathrm{t}_{2p-2}\,\delta_t\,\Phi_m(\alpha)=\Phi_m'(F_1jh^{-1}\beta)=\Phi_m'(f\beta)=\Phi_m'(t\alpha).$$

§8　相对同倫羣的第二类自然对应

我們利用把子空間挤为一点的办法，可以介紹相对同倫羣的第二类自然对应，和普通同倫羣的第二类自然对应一样，它也是計算相对同倫羣的重要的工具.

設 X 和 A 都是弧連通空間，$A\subset X$，我們用 $\hat{A}$ 表示由 $A\times(0,1)$ 把 $A\times\{1\}$ 迭合为一点后所成的拓扑空間，設由 $A\times(0,1)$ 到 $\hat{A}$ 的迭合映象为 I，我們可以假定 A 中的点 x 与 $\hat{A}$ 中的点 $I((x,0))$ 是相同的点，除此以外，X 和 $\hat{A}$ 沒有其他公共的点，空間 $X\cup\hat{A}$ 用 $\hat{X}$ 表示. 設由 (X,A) 到 $(\hat{X},\hat{A})$ 的包含映象为 i，利用連續同調羣的可割性公理，对任意系数羣 G 和任意正整数 m，i_* 是一些由 $H_m(X, A; G)$ 到 $H_m(\hat{X}, \hat{A}; G)$ 的同构对应，

設由 $\hat{X}$ 到 $(\hat{X}, \hat{A})$ 的內射映象为 j，由于 $\hat{A}$ 可以压縮为一点，利用同調羣序列的恰当性，很容易說明，对任意系数羣 G 和正整数 m，j_* 是一些由 $H_m(\hat{X}; G)$ 到 $H_m(\hat{X}, \hat{A}; G)$ 的同构对应，因此 $j_*^{-1} i_*$ 是一些由 $H_m(X, A; G)$ 到 $H_m(\hat{X}, G)$ 的同构对应.

設 f 为任何一个由弧連通空間对 (Y, B) 到弧連通空間对 (X, A) 的映象（卽使 $f(B) \subset A$ 的映象），它所引起的由 $H_m(Y, B)$ 到 $H_m(X, A)$ 的同态对应仍然用 f_* 表示，f 所引起的由 $\Pi_m(Y, B)$ 到 $\Pi_m(X, A)$ 的同态对应仍然用 f 表示.

利用 $f: (Y, B) \to (X, A)$，我們作一个映象 $\hat{f}: \hat{Y} \to \hat{X}$ 如下，使

$$\hat{f}(y) = f(y), \quad \text{当 } y \in Y \text{ 时}$$

$$\hat{f}(I(b), t) = I(f(b), t), \text{当 } b \in B, t \in (0,1) \text{ 时}$$

显然 $\hat{f}$ 是 f 的扩充，而且 $\hat{f}(\hat{B}) \subset \hat{A}$，但 $\hat{f}$ 是作为一个由 $\hat{Y}$ 到 $\hat{X}$ 的映象来考虑的.

如果 $u \in H_m(Y, B)$，$f_*(u) = 0$，$\mathscr{S}t_{2p-2}(u) = 0$，

則 $\hat{f}_* j_*^{-1} i_*(u) = j_*^{-1} i_* f_*(u) = 0$，$\mathscr{S}t_{2p-2} j_* i_*(u) = j_*^{-1} i_* \mathscr{S}t_{2p-2}(u) = 0$，因此 $\bigcap_{2p-2, \hat{f}} (j_*^{-1} i_*(u))$ 是有意义的，我們定义 $\bigcap_{2p-2, f} = \bar{i}_*^{-1} \bar{j}_* \left(\bigcap_{2p-2, \hat{f}} (j_*^{-1} i_*(u))\right)$，这里 $\bar{i}_*^{-1}$，$\bar{j}_*$ 分别表示由 i_*^{-1}，j 所引起的由

$H_{m-(2p-3)}(\hat{X}, \hat{A}; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(\hat{X}, \hat{A}))$，和

$H_{m-(2p-3)}(\hat{X}; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(\hat{X}))$ 到

$H_{m-(2p-3)}(X, A; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X, A))$ 和

$H_{m-(2p-3)}(\hat{X}, \hat{A}; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(\hat{X}, \hat{A}))$ 的同态对应. 显然 $\bigcap_{2p-2, f}$ 也是一个由 $f^{-1}(0)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X, A; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X, A))$ 的同态对应，命题 4 很容易的可以扩充到空間对的映象.

如果 A, B 都只有一个点，利用 $\hat{A}$，$\hat{B}$ 都是一些簡单綫段，很容易說明，新定义的 $\bigcap_{2p-2, f}$ 与 §3 所定义的 $\bigcap_{2p-2, f}$ 是完全一致的.

設 V^m 为一普通 m 維实球体，S^{m-1} 表示它的边界，$\alpha: (V^m, S^{m-1}) \to (X, A)$ 为 $\Pi_m(X, A)$ 中的一个元素，設 $e \in H_m(V^m, S^{m-1})$ 为腔胞 V^m 所在的同調类，对应 Φ_m，$\Phi_m(\alpha) = \alpha_*(e)$ 称为相对同倫羣的自然对应，如果 $\Phi_m(\alpha) = 0$，卽 $\alpha_*(e) = 0$，由于 $\mathscr{S}t_{2p-2}(e) = 0$ 和前面一样，我們定义 $\Phi'_m(\alpha) = \bigcap_{2p-2, f}(e)$，显然 Φ'_m 也是一个由 $\Phi_m^{-1}(0)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X, A; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X, A))$ 的同态对应. 我們也称 Φ'_m 为相对同倫羣的模 p 的第二类自然对应，如果 A 只有一个点，这时的相对同倫羣就是普通同倫羣，我們也可以很容易地說明：这时的相对同倫羣的第二类自然对应与普通同倫羣的第二类自然对应是一致的.

如果 $f: (Y, B) \to (X, A)$ 为一連續映象，和前面一样，我們用 $\bar{f}_*$ 表示 f 所引起的由

$H_{m-(2p-3)}(Y, B; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(Y, B))$ 到

$H_{m-(2p-3)}(X, A; Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X, A))$ 的同态对应，我們很容易地可以証明下列命題.

命題 15. 如果 $\alpha \in \Pi_m(Y, B)$ 而且 $\Phi_m(\alpha) = 0$，則 $\Phi_m(f\alpha) = 0$，而且 $\Phi'_m(f\alpha) = \bar{f}_* \Phi'_m(\alpha)$.

§9 相对同倫羣的 p 分量羣

在本节中，我們假定 (X, A) 为适合下列条件的弧連通空間对

(a) $\Pi_1(X) = \Pi_2(A) = \Pi_2(X, A) = 0$,

(b) 当 $3 \leqslant m \leqslant n-1$ 时，$H_m(X, A; Z_p) = 0$,

(c) 当 $2 \leqslant m \leqslant k-1$ 时，$H_m(X; Z_p) = 0$.

整数 $\min(2n-1, n+k-1)$ 用 K_1 表示，我們假定 $K_1 \geqslant n+2p-3$，由 [3]，当 $3 \leqslant m \leqslant n+k-1$ 时，$\Pi_m(\hat{X}, X, \hat{A}) \in C$. 利用三体同倫序列的恰当性，可以說明，当 $3 \leqslant m < n+k-1$ 时，$i: \Pi_m(X, A) \to \Pi_m(\hat{X}, \hat{A})$ 是一些 C 同构对应，由于 $\hat{A}$ 可以压縮为一点，对任意 m，$j: \Pi_m(\hat{X}) \to \hat{\Pi}_m(\hat{X}, \hat{A})$ 始終是同构对应，因而当 $n \leqslant m < K_1$ 时，$j^{-1}i: \Pi_m(X, A) \to \Pi_m(\hat{X})$ 是一些 C 同构对应.

当 $n+2p-3 \leqslant m < k_1$ 时，考察下列图形：

$$\begin{array}{ccc} \Pi_m(X, A) & \xrightarrow{j^{-1}i} & \Pi_m(\hat{X}) \\ \downarrow \Phi_m & & \downarrow \Phi_m \\ H_m(X, A) & \xrightarrow{j_*^{-1}i_*} & H_m(\hat{X}) \end{array}$$

很容易說明：$\Phi_m j^{-1} i = j_*^{-1} i_* \Phi_m$. (1)

$$\begin{array}{ccc} \Phi_m^{-1}(0) & \xrightarrow{j^{-1}i} & \Phi_m^{-1}(0) \\ \downarrow \Phi'_m & & \downarrow \Phi'_m \\ H_{m-(2p-3)}(X, A; Z_p) \Big/ \mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(X, A)) & \xrightarrow{\hat{j}_*^{-1}\hat{i}_*} & H_{m-(2p-3)}(\hat{X}, Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(\hat{X})) \end{array}$$

左边的 $\Phi_m^{-1}(0)$ 表示 $\Pi_m(X, A)$ 的子羣，而右边的 $\Phi_m^{-1}(0)$ 表示 $\Pi_m(\hat{X})$ 的子羣，利用命題 14，我們可以說明：

$$\Phi'_m j^{-1} i = \bar{j}_*^{-1} \bar{i}_* \Phi'_m. \tag{2}$$

如果用 K 表示正整数 $\min(K_1, n+4p-5)$，利用(1)(2)和定理(2)(3)(4)，我們可以很容易的証明下述各定理：

定理 5. 設 m 为任何一个适合条件 $n+2p-3 < m < K$ 的正整数，$u \in C(H_m(X, A), p)$，則在 $\Pi_m(X, A)$ 中有一元素 α 使 $\Phi_m(\alpha) = u$ 的充分必要条件是 $\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(u) = 0$.

和定理 2 一样，定理 5 相当于下列推理.

推理. 当 $n+2p-5 < m < K$ 时，$\Phi_m(C(\Pi_m(X, A), p)) = C(H_m(X, A), p) \cap \mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}^{-1}(0)$.

定理 6. 当 $n+2p-3 \leqslant m < K$ 时，$\Phi'_m: \Phi_m^{-1}(0) \to H_{m-(2p-3)}(X, A; Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(X, A))$ 是一些 C 同构对应.

和定理 3 一样，定理 6 也相当于下列推理.

推理. 当 $n+2p-3 \leqslant m < K$ 时，Φ'_m 引起一些由 $\Phi_m^{-1}(0) \cap C(\Pi_m(X, A), p)$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X, A; Z_p)/\mathscr{S}\mathrm{t}_{2p-2}(H_{m+1}(X; A))$ 的同构对应.

定理 7. 当 $n+2p-3 \leqslant m < K$ 时，設 $\alpha \in C(\Pi_m(X, A), p)$，$\Phi_m(\alpha) = u$，$u$ 的次数为 t (p 的一个乘冪)，則

(a) $\Phi_m(t\alpha) = 0$,

(b) $\Phi'_m(t\alpha) = \overline{\mathscr{S}}t_{2p-2}(\delta_t(u))$.

这里 $\overline{\mathscr{S}}t_{2p-2}$ 和定理 3 一样，表示由 $\overline{\mathscr{S}}t_{2p-2}$ 所引起的 $H_{m+1}(X,A;Z_p)/N(H_{m+1}(X,A))$ 到 $H_{m-(2p-3)}(X,A;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X,A))$ 的同态对应.

定理 5,6 說明 $C(\Pi_m(X,A),p)$ 是羣

$$H_{m-(2p-3)}(X,A;Z_p)/\mathscr{S}t_{2p-2}(H_{m+1}(X,A))$$

被羣 $C(H_m(X,A),p) \cap \mathscr{S}t_{2p-2}^{-1}(0)$ 的扩充，而定理 7 則說明这个扩充的构造，这样 $C(\Pi_m(X,A),p)$ 就完全确定了.

参 考 文 献

[1] Adem, J., The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 720—726.

[2] Cartan, H., (a) Sur les groupes d'Eilenberg Maclane. $H(\pi, n)$. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 407—471.

[3] 周学光: 同伦羣和同調羣的关系及其应用. 数学学报, 7 (1957), 346—369.

[4] Moore, J. C., Some applications of homology theory to homotopy problems. *Ann. of Math.*, **58** (1953), 954—988.

[5] Serre, J. P., Homologie singuliere des espaces fibres. *Ann. of Math.*, **54** (1951), 425—505.

[6] Serre, J. P., Groupes d'homotopie et classes de groupes abelians. *Ann. of Math.*, **58** (1953), 258—294.

[7] Steenrod, N. E., Reduced powers of cohomology classes. *Ann. of Math.*, **56** (1952), 47—67.

[8] Steenrod, N. E., (a) Homology group of symmetric groups and reduced power operation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **39** (1953), 213—217. (b) Cyclic reduced powers of cohomology classes. *ibid*, 217—223.

[9] Steenrod, N. E., Cohomology invariants of muppings. *Ann. of Math.*, **50** (1949), 954—988.

STEENRODS OPERATIONS AND HOMOTOPY GROUPS (I)

Chow Sho-kwan

(*Nankai University*)

Abstract

An English abstract of this paper was published in Science Record, **11** (1958), 355—357.

第9卷 第3期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 3
1959 年 9 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Sept., 1959

Steenrod 运算和同伦群(II)*

周 学 光
(南 开 大 学)

[3][1] 中用 Steenrod 运算确定了 $(n-1)$ 連通空間的一些同倫群的 p 分量群的代数构造，那里的 p 是一些大于 2 的素数. 本文則討論 $p=2$ 时的情况.

G. W. Whitehead 和 Л. С. Понтркгий 在 1950 年分別独立地确定了 n 維球 S^n 的 $(n+2)$ 維同倫群，张素誠，Hilton，Понтркгий 等則确定了 $(n-1)$ 維連通空間的 $(n+1)$ 維同倫群. 我們很自然有这样一个問題，如何計算 $(n-1)$ 連通空間的 $(n+2)$ 維同倫群. 当 $n \geqslant 4$ 时，本文解决了这个問題，我們将用 Steenrod 平方及 Adem 运算的推广去計算 $(n-1)$ 連通空間的 $(n+2)$ 維同倫群的 2 分量群，利用作者較早的結果 $\Pi_{n+2}(X)$ 的秩数 $= X$ 的 $(n+2)$ 維 Betti 数，当 p 为奇数时，$C(\Pi_{n+2}(X), p) \approx C(H_{n+2}(X), p)$. (参考 [2])，則 $(n-1)$ 連通空間的 $(n+2)$ 維同倫群便可以計算出来了.

(I) 中曾經利用 Steenrod 运算介紹了同倫群到同調群的第二类自然对应，这里除运用同倫群的第二类自然对应以外，我們应用 Adem 运算的推广去介紹同倫群到同調群的第三类自然对应. 我們的方法可以說明，計算同倫群的問題与建立更高类的上同調运算是等价的問題.

Shiraiwa 曾經利用 Shimada 及 Uehera 所推广的 Adem 运算去討論 A_n^3 多面体的同倫型的問題. 作者在 [9] 中已經举例說明 Shiraiwa 的結果是錯誤的，主要原因是：只是 Shimada 和 Uehera 所介紹的运算 Φ_0 和 Φ_2 是不足以确定 A_n^3 多面体的同倫型和 $(n+2)$ 維同倫群的，还需要更多的运算，因而本文一开始就利用 Adem 的方法去介紹了一組新的第二类上同調运算 $\varphi', \cdots, \varphi'', \cdots$.

現在我們将本文所使用的一些符号介紹一下.

在本文里，我們用 C 表示包含的元素都是奇数次的所有交換群所成的交換群类.

对于任一空間 Y，和一般文献一样，我們用 $Sq^i: H^m(Y, Z_2) \to H^{m+i}(Y, Z_2)$ 表示上同調群的 Steenrod 平方. $Sq^i: H_{m+i}(Y, Z_2) \to H_m(Y, Z_2)$ 則表示 Sq^i 在同調群的对偶运算，对于任意正整数 i，我們也用 $\mu_{2,2^i}$ 表示由 Z_{2^i} 到 Z_2 的自然对应所引起的由 $H^m(Y, Z_{2^i})$ 和 $H_m(Y, Z_{2^i})$ 到 $H^m(Y, Z_2)$ 和 $H_m(Y, Z_2)$ 的同态对应. 用 $\mu_{2,0}$ 表示由 Z 到 Z_2 的自然对应所引起的由 $H^m(Y)$ 和 $H_m(Y)$ 到 $H^m(Y, Z_2)$ 和 $H_m(Y, Z_2)$ 的同态对应. 对应 $Sq_i\, \mu_{2,0}$: $H_{m+i}(Y) \to H_m(Y, Z_2)$ 則用 $\mathscr{S}q_i$ 表示. 由 $H_{m+1}(Y, Z_{2^i})$ 和 $H^m(Y, Z_{2^i})$ 到 $H_m(Y)$ 和 $H^{m+1}(Y)$ 的 Bockstein 对应都用 Δ_{2^i} 表示. 如果 Y 为一单連通空間，α 为 $\Pi_m(Y)$ 中的任何一个元素. 我們用 $E^{m+1}(\alpha)$ 表示一个边界用映象 α 与 Y 迭合的 $m+1$ 維腔胞.

設 A 为任一交換群，B 为 A 的子群，x 为 A 的任一元素. 我們也用 x 表示 A/B 中的

* 1959 年 5 月 4 日收到.

1) 指参考文献[3]. 以下仿此.

包含 x 的剩余类.

其他的符号基本上和 [3] 一样. 这里我們就不一一列举了.

現在将本文的内容介紹一下. 本文分四部分. 第一部分利用 Adem 上鏈对应介紹一些新的同調运算,第二部分則介紹同倫羣到同調羣的第三类自然对应,第三部分是我們的主要結果,第四部分則說明如何利用同調羣及同調运算去确定 $(n-1)$ 連通空間的 $(n+2)$ 維同倫羣的 2 分量羣.

本文的大部分結果已經在科学記学([9])上宣布过,本文除了給出 [9] 中結果的詳細証明以外,还补充了一些也具有一定意义的結果.

本文承江泽涵教授提了一些宝貴意見,作者謹此致謝.

第一部分 Adem 运 算

§1. 运 算 $\varphi^1, \cdots, \varphi^i, \cdots, \varphi^\infty$

設 K 为任一有限复形, m 为一固定正整数, i 为任一正整数,我們用 M_i 表示 $H^{m+3}(K, Z_2)$ 的子羣 $\mu_{2,0}\Delta_2{}^{i-1}[\mu_{2,2}{}^{i-1}(\mathrm{Sq}^2(H^m(K, Z_2)))]$. 用 N_i 表示 $H^m(K, Z_2)$ 的子羣 $(\mathrm{Sq}^2)^{-1}(0) \cap (\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1)^{-1}(M_i)$, 如果 $i=1$, 則 $M_1 = 0$, $N_1 = (\mathrm{Sq}^2)^{-1}(0) \cap (\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1)^{-1}(0)$.

設 x 为 N_i 中的任何一个上同調类, u 为 x 中的任何一个上循环,可以假定 u 中所有的系数都是整数,由于 $x \in N_i \subset \mathrm{Sq}_2^{-1}(0)$, 一定有一 $(m+1)$ 維整数上鏈 v 使

$$u \cup_{(m-2)} u = \delta v \bmod 2.$$

設

$$Z^2(v) = v \cup_{(m-1)} v + v \cup_m \delta v,$$

則

$$\delta(Z^2(v)) = u \cup_{(m-2)} u \bmod 2.$$

又由于 $x \in N_i \subset (\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1)^{-1}(M_i)$, 因而一定有一个 $(m+2)$ 維上鏈 ω 和两个 $(m+3)$ 維上鍊 v' 和 v'' 使下列条件成立, (a) $\delta\omega = 2^{i-1} v$. (b) $\mu_{2,2}{}^{i-1}(\omega^*) \in \mathrm{Sq}^2(H^m(K, Z_2))$. 这里 ω^* 表示 $H^{m+2}(K, Z_2)$ 中包含上循环 ω^* 的上同調类. (c) $2v'' = (u \cup_{(m-1)} u) \cup_{(m-1)} (u \cup_{(m-1)} u) - v'$. 我們很容易說明,

$$\delta(v'') = (u \cup_{(m-1)} u) \cup_{(m-2)} (u \cup_{(m-1)} u)\ \delta\left(\mathrm{Sq}'u \cup_m \frac{\delta \mathrm{Sq}'u}{2}\right) \bmod 2.$$

再設 $E_i: C^q(K^4) \to C^{q-i}(K)$ 表示 Adem 的上鏈对应. 我們設

$$\varphi'^i(u) = E_{3m-3}(u^4) + Z^2(v) + v'' + \left(\mathrm{Sq}'u \cup_m \frac{\delta \mathrm{Sq}'u}{2}\right).$$

則

$$\begin{aligned}\delta(\varphi'^i(u)) &= \delta(E_{3m-3}(u^4)) + \delta(Z^2(v)) + \delta(v'') + \delta\left(\mathrm{Sq}'u \cup_m \frac{\delta \mathrm{Sq}'u}{2}\right) = \\ &= \delta(E_{3m-3}(u^4)) + (u \cup_{(m-2)} u) \cup_m (u \cup_{(m-2)} u) + \\ &+ (u \cup_{(m-1)} u) \cup_{(m-2)} (u \cup_{(m-1)} u) = 0 \bmod 2.\end{aligned}$$

我們定义

$$\varphi^i(x) = (\varphi^i(u))^* \bmod \mathrm{Sq}^2 H^{m+1}(K, Z_2) + M_{i+1},$$

这里 $(\varphi'^i(u))^*$ 表示 $H^{m+3}(K, Z_2)$ 中包含 $\varphi^i(u)$ 的上同調类,可以証明 φ^i 是一个由 N_i 到 $H^{m+3}(K, Z_2)/\mathrm{Sq}^2 H^{m+1}(K, Z_2) + M_{i+1}$ 的同态对应.

我們再設 $M_\infty = \mu_{2,0}(C(H^{m+3}(K), 2))$，$N_\infty$ 表示 $H^m(K, Z_2)$ 中的子羣 $(Sq^2)^{-1}(0) \cap \cap (Sq^2Sq^1)^{-1}(M_\infty)$. 和上面一样，可以定义一个由 N_∞ 到 $H^{m+3}(K, Z_2)/Sq^2H^{m+1}(K, Z_2) + + M_\infty$ 的同态对应 φ^∞.

我們很容易說明，当 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \infty$ 时：

$$M_i \subset M_j,$$

$$N_i \subset N_j,$$

則 $H^{m+3}(K, Z_2)/Sq^2(H^{m+1}(K, Z_2)) + M_{j+1}$ 可以看为 $H^{m+3}(K, Z_2)/(Sq^2H^{m+1}(K, Z_2) + + M_{i+1})$ 的商羣. 假定由前者到后者的射影为 λ^{ji}，由 N_i 到 N_j 的內射对应为 τ^{ji}，显然我們有

$$\varphi^j \tau^{ji} = \lambda^{ji} \varphi^i.$$

由于 K 是一个有限复形，$H^{m+3}(K, Z_2)$ 一定具有有限多个母元素. 設 $C(H^{m+3}(K), Z)$ 的次数为 2^r. 利用上式很容易地可以說明当 $r+1 \leqslant i \leqslant \infty$ 时，$\varphi^i = \varphi^{r+1}$，$M_i = M_{r+1}$，$N_i = N_{r+1}$，这說明对于一个固定有限复形来說只要有限多个运算 $\varphi^1, \cdots, \varphi^{r+1}$ 就行了.

§2. $\varphi', \cdots, \varphi^i, \cdots, \varphi^\infty$ 在同調羣的对偶运算

設 i 为任一正整数，我們用 L_i 表示 $H_{m+3}(K, Z_2)$ 的子羣 $\mu_{2,2^i}[(Sq_2\Delta_{2^i})^{-1}(0)]$，用 T_i 表示 $H_{m+3}(K, Z_2)$ 的子羣 $Sq_2^{-1}(0) \cap L_i$，如果 $i=0$，則規定 $L_i = 0$，显然当 $i \geqslant 1$ 时，則 φ^i 的对偶对应是一个由 T_i 到 $H_m(K, Z_2)/Sq_2(H_{m+2}(K, Z_2)) + Sq_1 Sq_2 L_{i-1}$ 的对应 φ_i，而 φ^∞ 的对偶运算則是一个由 $Sq_2^{-1}(0) \cap \mu_{2,0}(H_{m+3}(K))$ 到 $H_m(K, Z_2)/Sq_2(H_{m+2}(K)) + +Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{m+3}(K))$ 的对应 φ_∞. 对应 $\varphi_\infty\mu_{2,0}: \mathscr{S}q_2^{-1}(0) \to H_m(K, Z_2)/Sq_2(H_{m+2}(K, Z_2)) + +Sq_1(Sq_2H_{m+3}(K))$ 則簡写为 θ.

§3. 在一些簡单多面体中，$\varphi^1, \cdots, \varphi^n, \cdots, \varphi^\infty, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots, \varphi_\infty$ 的計算

首先我們介紹一下 Adem 在 [4] 中所介紹的运算 Φ 和这里所介紹的运算的关系. 根据 Φ 和 φ^i 的定义，我們很容易証明下列命題：

命題 1. 設 $u \in H^m(K)$ 而且 $Sq^2\mu_{2,0}(u) = 0$，i 为任何一个正整数或 ∞，則

(a) $\mu_{2,0}(u) \in N_i$,

(b) $\Phi(u) = \varphi^i \mu_{2,0}(u) \mod M_{i+1} + Sq^2H^{m+2}(K, Z_2)$

利用 Φ 和 φ^i 的关系，我們就很容易說明在一些簡单的多面体中如何計算运算 φ^i 了，設 η_m^{m+2} 为 $\Pi_{m+2}(S^m)$ 中的母元素，則我們有下述命題

命題 2. 在 $S^m \cup E^{m+3}(\eta_m^{m+2})$ 中，下列关系成立：

(a) $\varphi^i([S^m]^*) = [E^{m+3}(\eta_m^{m+2})]^*$,

(b) $\varphi_i([E^{m+3}(\eta_m^{m+2})]_*) = [S^m]_*$.

証. 由 [4] 在 $S^m \cup E^{m+3}(\eta_m^{m+2})$ 中，$\Phi([S^m]^*) = [E^{m+3}(\eta_m^{m+2})]^*$，利用命題 1，我們馬上得到 (a)，由于 (b) 是 (a) 的对偶命題，因此 (b) 也成立.

設 α 为 $\Pi_{m+2}(S^m)$ 的一个母元素，我們用 $S^m|\lambda$ 表示 $(m+1)$ 維腔胞 $E^{m+1}(\lambda^\alpha)$，如果 λ 为 2 的一个乘冪，利用由 $S^m \cup E^{m+3}(\eta_m^{m+2})$ 到 $(S^m|\lambda) \cup E^{m+3}(\eta_m^{m+2})$ 的內射映象，我們得到下列命題

命題 3. 設 λ 为 2 的任何一个乘幂，i 为任何一个正整数，則在 $(S^m|\lambda) \cup E^{m+3}(\eta_m^{m+2})$ 中，命題 2 的 (a) 和 (b) 仍旧成立.

設 S^{m+2} 为任何一个和 $S^m|\lambda$ 只有一个公共点的 $(m+2)$ 維球，β 为 $\Pi_{m+2}(S^m)$ 的一个母元素，i 为任何一个正整数，則我們有下述命題.

命題 4. 在 $(S^m|\lambda) \cup S^{m+2} \cup E^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta)$ 中，下列关系成立.

(a) $[S^m]^* \in N_i$,

(b) $\varphi^i([S^m]^*) = [E^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta)]^*$,

(c) $[E^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta)]_* \in T_i$,

(d) $\varphi_i([E^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta)]_*) = [S^m]_*$.

証. 根据 N_i 的定义，馬上可以說明 (a). 利用把 S^{m+2} 迭合为一点的办法，馬上可以說明 (b). (c)(d) 是 (a) 和 (b) 的对偶命題不用証明.

由于 $\Pi_{m+2}(S^m|2) \approx Z_4$，設 γ 为 $\Pi_{m+2}(S^m|2)$ 的任何一个母元素，則 $\eta_m^{m+2} = 2\gamma$，假定 S_1^{m+2} 和 S_1^{m+2} 为任何两个和 $S^m|2$ 只有一个公共点 Q 的 $(m+2)$ 維球，而且 S_1^{m+2} 和 S_2^{m+2} 相互間也只有一个公共点 Q，設 β_1 和 β_2 分别为 $\Pi_{m+2}(S_1^{m+2})$ 和 $\Pi_{m+2}(S_2^{m+2})$ 的母元素，i, j 为两个适合条件 $j > i+1$ 的正整数，設 $R = (S^m|2) \cup S_1^{m+2} \cup S_2^{m+2} \cup E_1^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta_1) \cup \cup E_2^{m+3}(\gamma - 2^i\beta_2)$，則我們有下述命題.

命題 5. 在多面体 R 中，下列关系成立:

(a) $N_1 = N_2 = \cdots = N_i = N_{i+1} = 0$,

(b) $N_{i+2} = H^m(R, Z_2)$,

(c) $\varphi^{i+2}([S^m]^*) = [E_1^{m+3}(\eta_m^{m+3} - 2^i\beta_1)]^* \mod [E_2^{m+3}(\gamma - 2^i\beta_2)]^*$.

(d) $T_1 = T_2 = \cdots = T_i = T_{i+1} = 0$,

(e) $T_{i+2} = \{[E_1^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta_1)]_*\}$,.

(f) $\varphi_{i+2}([E_1^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta_1)]_*) = [S^m]_*$;

这里 $\{[E_1^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta_1)]_*\}$ 表示在 $H_{m+3}(R, Z_2)$ 中以 $[E_1^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta_1)]_*$ 为母元素的子羣.

証. 利用 $\mathrm{Sq}^2(\mathrm{Sq}^1[S^m]_*) = \mathrm{Sq}^2([S^m|2]^*) = [E_2^{m+3}(\gamma - 2^i\beta_2)]^*$ 及 R 的上同調羣的計算，(*a*), (*b*) 馬上可以得到証明.

如果把 S_1^{m+2} 迭合为一点 Q，則 $E_1^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta_1)$ 迭合为一个 $(m+3)$ 維腔胞 $E_3^{m+3}(\eta_m^{m+2})$，設 $T = (S^m|2) \cup E_3^{m+3}(\eta_m^{m+2}) \cup E_2^{m+2}(\gamma - 2^i\beta_2)$，$W = (S^m|2) \cup E_3^{m+3}(\eta_m^{m+2})$，設由 W 到 T 的內射映象为 h，由 R 到 T 的迭合映象为 l，則由于在 W 中，

$$\varphi^{i+2}([S^m]^*) = [E_3^{m+3}(\eta_m^{m+2})]_*$$

利用映象 h，可以說明在 T 中

$$\varphi^{i+2}([S^m]^*) = [E_3^{m+3}(\eta_m^{m+2})]^* \mod E_2^{m+3}(\gamma - 2^i\beta_2)]^*$$

利用映象 l. 可以說明在 R 中

$$\begin{aligned}\varphi^{i+2}([S^m]^*) &= \varphi^{i+2}l^*([S^m]^*) = \\ &= l^*\varphi^{i+2}([S^m]^*) = l^*([E_3^{m+3}(\eta_m^{m+2})]_*) = \\ &= [E_1^{m+3}(\eta_m^{m+2} - 2^i\beta_1)]_* \mod E_2^{m+3}(\gamma - 2^i\beta_2).\end{aligned}$$

这样 (c) 得到了証明.

类似可以証明(d)，(e)，(f)，在这里我們得指出，由于在 R 中，$\varphi^1, \cdots, \varphi^{i+1}$ 的定义域等于零，因而在 R 中，$\varphi^1=\varphi^2=\cdots=\varphi^{i+1}=0$，由于 $\varphi^{i+2}\neq 0$．这說明对于所有的复形来說，$\varphi^1, \cdots, \varphi^i, \cdots$（不包含 φ^∞）是独立的．

第二部分　同倫羣到同調羣的自然对应

§4. 同伦羣到同調羣的模 2 的第一类自然对应

（Ⅰ）中曾經用 Steenrod 运算 $\mathscr{S}t_{2p-2}$ 定义了同倫羣的模 p 的第二类自然对应，如果把那里的 p 换为 2，$\mathscr{S}t_{2p-2}$ 换为 $\mathscr{S}q_2$，对任一单連通空間 Y，我們同样可以定义同倫羣的模 2 的第二类自然对应 Φ'_m．

$$\Phi'_m\colon \Phi_m^{-1}(0)\to H_{m-1}(Y, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y)).$$

設 η_m^{m+1} 为 $\Pi_{m+1}(S^m)$ 的不等于零的母元素，显然在 $S^m\cup E^{m+2}(\eta_m^{m+1})$ 中，$Sq^2([S^m]^*)=$ $=[E^{m+2}(\eta_m^{m+1})]^*$，因而 $Sq_2([E^{m+2}(\eta_m^{m+1})]_*)=[S^m]_*$，因而在 S^m 中，$\Phi'_{m+1}(\eta_m^{m+1})=[S^m]_*$．利用这个性质，我們有以下結論．

命題 6. 設 λ 为任何一个整数．对于多面体 $S^m|\lambda$[1] 来說，Φ'_{m+1} 是一个同构对应．

証． 如果 $\lambda=0 \mod 2$．則 $\Pi_{m+1}(S^m|\lambda)\approx Z_2$，而 η_m^{m+1} 是 $\Pi_{m+1}(S^m)$ 的一个母元素．由于 $H_{m+1}(S^m|\lambda)=0$，因而 $\Phi_{m+1}^{-1}(0)=\Pi_{m+1}(S^m)$．因之 η_m^{m+1} 也是 $\Phi_{m+1}^{-1}(0)$ 的一个母元素，由于 $H_m(S^m|\lambda, Z_2)\approx Z_2$，而 $[S^m]_*$ 是 $H_m(S^m|\lambda, Z_2)$ 的一个母元素，因之 Φ'_{m+1} 是一个由 $\Pi_{m+1}(S^m|\lambda)$（即 $\Phi_{m+1}^{-1}(0)$）到 $H_m(S^m|\lambda, Z_2)$ 的同构对应，如果 $\lambda=1 \mod 2$，則 $\Pi_{m+1}(S^m)=0$，$H_m(S^m|\lambda, Z_2)=0$，显然 Φ'_{m+1} 也是一个同构对应．

（証毕）

設 λ 为 2 的乘幂，設由 S^m 到 $(S^m|\lambda)$ 的內射映象为 L，由 $S^m|\lambda$ 到 $(S^m|\lambda, S^m)$ 的內射映象为 M，則下列序列

$$\Pi_{m+2}(S^m)\xrightarrow{L}\Pi_{m+2}(S^m|\lambda)\xrightarrow{M}\Pi_{m+2}(S^m|\lambda, S^m)\xrightarrow{\partial}\Pi_{m+1}(S^m)\xrightarrow{L}\Pi_{m+1}(S^m|\lambda)$$

是一个恰当序列．由于 $L\colon \Pi_{m+1}(S^m)\to\Pi_{m+1}(S^m|\lambda)$ 是一个一一同态对应，因之，$M\colon$ $\Pi_{m+2}(S^m|\lambda)\to\Pi_{m+2}(S^m|\lambda, S^m)$ 是一个滿同态对应．

和（Ⅰ）一样，我們可以定义空間对的相对同倫羣的模 2 的第二类自然同态对应．由于 $\Pi_{m+2}(S^m|\lambda, S^m)$ 和 $H_{m+1}(S^m|\lambda_2, S^m, Z_2)$ 分别与 $\Pi_{m+2}(S^{m+1})$，$H_{m+1}(S^{m+1}, Z_2)$ 同构，因之 $\Phi'_{m+2}\colon \Phi_{m+2}^{-1}(0)\colon \Pi_{m+2}(S^m|\lambda, S^m)\to H_{m+1}(S^m|\lambda, S^m, Z_2)$ 是一个同构对应，利用下列图形的可交换性

$$\Phi'_{m+2}M=M^*\Phi'_{m+2}$$

$$\begin{array}{ccc}\Pi_{m+2}(S^m|\lambda) & \xrightarrow{M} & \Pi_{m+2}(S^m|\lambda, S^m)\\ \downarrow\Phi'_{m+2} & & \downarrow\Phi'_{m+2}\\ H_{m+1}(S^m|\lambda, Z_2) & \xrightarrow{M_*} & H_{m+1}(S^m|\lambda, S^m, Z_2)\end{array}$$

我們立刻得出下列結論．

命題 7. 設 λ 为 2 的一个乘幂，則在多面体 $S^m|\lambda$ 中，Φ'_{m+2} 是一个滿同态对应．

---

1) 如果 $\lambda=0$，$S^m|0$ 表示 m 維球．

事实上，即使 λ 是一般的整数时，上述性质也是成立的，由于下面并不需要，我們就不介紹了。

命題 8. 設 Y 为任何一个单連通空間，$\alpha\in\Pi_m(Y)$ 則

(a) $\Phi_{m+1}(\alpha\circ\eta_m^{m+1}) = 0$[1)]，

(b) $\Phi'_{m+1}(\alpha\circ\eta_m^{m+1}) = \mu_{2,0}\,\Phi_m(\alpha) \mod \mathscr{S}q_2(H_{m+2}(Y))$.

証. 設 α 是一个由 S^m 到 Y 的映象，則 $\Phi_m(\alpha\circ\eta_m^{m+1}) = \alpha_*(\Phi_{m+1}(\eta_m^{m+1})) = \alpha_*(0)=0$，所以 (a) 成立.

$\Phi'_{m+1}(\alpha\circ\eta_m^{m+1}) = \alpha_*, \Phi'_{m+1}(\eta_m^{m+1}) = \alpha_*([S^m]_*) = \mu_{2,0}\,\Phi_m(\alpha) \mod \mathscr{S}q_2(H_{m+2}(Y))$ 所以 (b) 也成立.

（証毕）

§5. 同伦羣到同調羣的模 2 的第三类的自然对应

設 Y 为任一单連通空間，$\alpha\in\Pi_m(Y)$，設 $Y' = Y\cup E^{m+1}(\alpha)$，設由 Y 到 Y' 的內射映象为 g，如果 $\Phi_m(\alpha)=0$，則 $E^{m+1}(\alpha)$ 在 Y' 中表示一个循环，而且在 Y 中，$\Phi'_m(\alpha) = g_*^{-1}\mathscr{S}q_2([E^{m+1}(\alpha)]_*) \mod \mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y))$. 如果 $\Phi'_m(\alpha)=0$，在 $H_{m+1}(Y)$ 中一定有一 u 使 $g_*\mathscr{S}q_2[E^{m+1}(\alpha)]_* = \mathscr{S}q_2(u)$，即 $\mathscr{S}q_2([E^{m+1}(\alpha)]_*) = \mathscr{S}q_2g_*(u)$. 因之在 Y' 中，$\mathscr{S}q_2([E^{m+1}(\alpha)]_* - g_*(u)) = 0$. 則对 $[E^{m+1}(\alpha)]_* - g_*(u)$ 可施以运算 θ，我們定义

$$\Phi''_m(\alpha) = g_*^{-1}(\theta([E^{m+1}(\alpha)]_* - g_*(u))) \mod$$
$$\mathrm{Sq}_2(H_m(Y, Z_2)) + \mathrm{Sq}_1\mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y)) + \theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0)).$$

和(I)一样，同样可以証明 Φ''_m 是一个由 $\Phi'^{-1}_m(0)$ 到 $H_{m-2}(Y, Z_2)/\mathrm{Sq}_2(H_m(Y,Z_2)+\mathrm{Sq}_1\mathscr{S}q_2\cdot(H_{m+1}(Y)) + \theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 的同态对应，我們称 Φ''_m 为同倫羣到同調羣的模 2 的第三类自然对应. 本文簡称为同倫羣的第三类自然对应.

为了說明方便起見，我們用 $S^m|0$ 表示 m 維球 S^m，則我們有下列命題

命題 9. 設 λ 为 0 或 2 的一个乘冪，則在多面体 $S^m|\lambda$ 中，Φ''_{m+2} 是一个同构对应.

証. 由于在 $S^m|\lambda$ 中，$\Phi'_{m+2}: \Phi^{-1}_{m+2}(0) = \Pi_{m+2}(S^m|\lambda) \to H_{m+1}(S^m|\lambda, Z_2)$ 是一个滿同态对应，因之 $\Phi'^{-1}_{m+2}(0) \approx Z_2$，由于 $\Phi'_{m+2}(\eta_m^{m+2})=0$，而且在 $S^m|\lambda$ 中 $\eta_m^{m+2} \neq 0$，因而 η_m^{m+2} 是 $\Phi'^{-1}_m(0)$ 的母元素，由于在 $S^m|\lambda\cup E^{m+3}(\eta_m^{m+2})$ 中，$\theta([E^{m+3}(\eta_m^{m+2})]_*) = [S^m]_*$，因而在 $(S^m|\lambda)$ 中，$\Phi''_{m+2}(\eta_m^{m+2}) = [S^m]_*$. 由于 $H_m(S^m|\lambda, Z_2) \approx Z_2$. 因而 Φ''_{m+2} 是一个由 $\Phi'^{-1}_{m+2}(0)$ 到 $H_m(S^m|\lambda, Z_2)$ 的同构对应.

事实上，上述命題是对任意整数 λ 成立的，由于以后不需要，这里就不介紹了.

命題 10. 設 λ 为 0 或 2 的一个乘冪，α 为 $\Pi_{m+2}(S^m|\lambda)$ 中的任意一个元素 α，則

$$\Phi''_{m+2}(2\alpha) = \mathrm{Sq}_1\,\Phi'_{m+2}(\alpha).$$

証. 只要証明上述性質对 $\Pi_{m+2}(S^m|\lambda)$ 的任何一組母元素成立卽可.

如果 $\lambda=0$，則由于 η_m^{m+2} 是 $\Pi_{m+2}(S^m)$ 的母元素，而 $\Phi'_{m+2}(\eta_m^{m+2}) = 0$，$\Phi''_{m+2}(2\eta_m^{m+2}) = \Phi''_{m+2}(0) = 0$，因而 $\Phi''_{m+2}(2\eta_m^{m+2}) = \mathrm{Sq}_1\Phi'_{m+2}(\eta_m^{m+2})$，

如果 $\lambda\geqslant 2$，由 §4 的叙述在 $\Pi_{m+2}(S^m|\lambda)$ 中一定有一元素 γ 使 $M(\gamma)\neq 0$，(这里 M

---

1) 这里 $\alpha\circ\eta_m^{m+1}$ 表示 η_m^{m+1} 与 α 接合后所得的映象，$\alpha\cdot\eta_m^{m+1}$ 所在的同伦类.

表示由 $S^m|\lambda$ 到 $(S^m|\lambda, S^m)$ 的內射映象)，而且 $\Phi'_{m+2}(\gamma) = [S^m|\lambda]_*$，如果 $\lambda = 2$，$\eta_m^{m+2} = 2\gamma$，而且 γ 是 $\Pi_{m+2}(S^m|2)$ 的母元素，因而 $\Phi''_{m+2}(2\gamma) = \Phi''_{m+2}(\eta_m^{m+2}) = [S^m]_*$．但 $Sq_1(\Phi'_{m+2}(\gamma)) = Sq_1([S^m|2]_*) = [S^m]_*$，因之 $\Phi''_{m+2}(2\gamma) = Sq_1\Phi'_{m+2}(\gamma)$．如果 $\lambda > 2$，則 $2\gamma = 0$，而且 η_m^{m+2} 和 γ 是 $\Pi_{m+2}(S^m|\lambda)$ 的一組母元素，由于 $\Phi''_{m+2}(2\gamma) = \Phi''_{m+2}(0) = 0$，而 $Sq_1\Phi''_{m+2}(\gamma) = Sq_1(S^m|\lambda) = 0$，因之 $\Phi''_{m+2}(2\gamma) = Sq_1\Phi''_{m+2}(\gamma)$，和前面一样 $\Phi''_{m+2}(2\eta_m^{m+2}) = Sq_1\Phi_{m+2}^{-1}(\eta_m^{m+2})$，因此上述命題对 $\Pi_{m+2}(S^m|\lambda)$ 的任意元素 α 成立．

（証毕）

和命題 8 一样，我們可証明下列命題．

命題 11. 設 Y 为任何一个单連通空間，$\alpha\in\Pi_m(Y)$，則

(a) $\Phi_{m+2}(\alpha\circ\eta_m^{m+2}) = 0$，

(b) $\Phi'_{m+2}(\alpha\circ\eta_m^{m+2}) = 0$，

(c) $\Phi''_{m+2}(\alpha\circ\eta_m^{m+2}) = \Phi_m(\alpha) \mod [Sq_2(H_{m+2}(Y, Z_2)) + Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{m+3}(Y)) + \theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))]$．

第三部分　主要結果及其証明

§6. 主 要 結 果

定理 1. 設 Y 为任一单連通空間 $\alpha\in\Pi_{m+2}(Y)$，i 为任一正整数，如果 $2^i\Phi_m(\alpha) = 0$，則

(a) $\Phi_m(2^i\alpha) = 0$，

(b) $\Phi'_m(2^i\alpha) = Sq_2\delta_{2^i}\Phi_m(\alpha) \mod \mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y))$，

(c) 如果 $\Phi'_m(2^i\alpha) = 0$，則

$\Phi''_m(\alpha) = \varphi_i\delta_{2^i}\Phi_m(\alpha) \mod [Sq_2(H_m(X, Z_2) + Sq_1Sq_2(L_{i-1}) + \varphi_i\,\mu_{2,0}\mathscr{S}q_2^{-1}(0)]$．

这里 δ_{2^i} 表示 [3] 中所介紹的同調羣的上边緣运算．

設 n 为任何一个大于 3 的正整数，在本文里，我們假定 X 是一个适合下列条件的单連通空間：

① 当 $2\leqslant i\leqslant n-1$ 时，$H_i(X, Z_2) = 0$；

② $H_n(X)$, $H_{n+1}(X)$, $H_{n+2}(X)$ 都具有有限多个母元素．

条件①相当于下列条件：

X 是一个 $(n-1)$—C—連通空間．

定理 2. 設 $u\in C(H_{n+2}(X), 2)$，則 u 是一个球面元素的充分必要条件是 $\mathscr{S}q_2(u)=0$．

利用 [2] 中定理 2，$\Phi_{n+2}^{-1}(0)$ 是一有限羣．我們有下列推理．

推理．$\Phi_{n+2}(C(\Pi_{n+2}(X), 2) = C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$．

如果 X 是一个 $(n-1)$ 連通空間，則定理 2 可以扩充为下述定理．

定理 2′. 如果 X 是一个 $(n-1)$ 連通空間，$u\in H_{n+2}(X)$，則 u 是一个球面元素的充分必要条件是 $\mathscr{S}q_2(u) = 0$．

現在我們来介紹 X 的 $\Phi_{n+2}^{-1}(0)$ 的构造．

定理 3. 对于 X 来說，$\Psi'_{n+2}: \Phi_{n+2}^{-1}(0) \to H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$ 是一个滿同态

对应.

由于 $\Phi'^{-1}_{n+2}(0)$ 是一有限羣，我們有下述推理.

推理. $\Phi'_{n+2}(C(\Phi'^{-1}_{n+2}(0),2)) = H_{n+1}(X,Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$.

定理 4. 对于 X 来說，$\Phi''_{n+2}:\Phi'^{-1}_{n+2}(0)\to H_n(X,Z_2)/\mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X,Z_2))+\mathrm{Sq}_1\mathscr{S}q_2\cdot(H_{n+3}(X))+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 是一个 C 同构对应.

由于 $\Phi'^{-1}_{n+2}(0)$ 是一个有限羣，我們有下列推理.

推理. Φ''_{n+2} 引起一个由 $C(\Phi'^{-1}_{n+2}(0),2)$ 到 $H_n(X,Z_2)/\mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X,Z_2))+\mathrm{Sq}_1\mathrm{Sq}_2\cdot(H_{n+3}(X))+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 的同构对应.

定理 5. 对于空間 X 的 $\Phi'^{-1}_{n+2}(0)$ 中的任意一个元素 α,

$$\Phi''_{n+2}(2\alpha)=\mathrm{Sq}_1\Phi'_{n+2}(\alpha)\quad\mathrm{mod}$$
$$\mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X,Z_2))+\mathrm{Sq}_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0)).$$

事实上，定理 5 中的 (b) 对于任意单連通空間 Y 成立，由于証明比較麻煩，而且以后也不需要，我們这里就不介紹了.

定理 3 和定理 4 說明了，羣 $C(\Pi_{n+2}(X),2)\cap\Phi'^{-1}_{n+2}(0)$ 是羣 $H_n(X,Z_2)/\mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X,Z_2))+\mathrm{Sq}_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 被羣 $H_{n+1}(X,Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$ 的扩充，而定理 5 則說明这个扩充的构造. 这样羣 $C(\Pi_{n+2}(X),2)\cap\Phi^{-1}_{n+2}(0)$ 的构造就完全确定了. 而定理 2 則說明羣 $C(\Pi_{n+2}(X),2)$ 是羣 $C(\Pi_{n+2}(X),2)\cap\Phi^{-1}_{n+2}(0)$ 被羣 $C(H_{n+2}(X),2)\cap\mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的扩充. 我們将在第四部分說明，利用定理 1 可以說明这个扩充的构造. 这样，$C(\Pi_{n+2}(X),2)$ 就完全可以用同調羣及同調运算 $\varphi_1,\cdots,\varphi_i,\cdots$ 确定出来.

§7. 定理 1 的証明

設 Y 为任一单連通空間，m 为任一大于 1 的正整数，$\alpha'\in\Pi_m(Y)$. $\Phi_m(\alpha')=0$，β 为 $\Pi_m(S^m)$ 的一个母元素，i 为任一正整数，設 $Y'=Y\cup S^m\cup E^{m+1}(\alpha'-2^i\beta)$，則我們有下列命題.

命題 12. 在多面体 Y' 中

(a) $\Phi'_m(\alpha')=\mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}([S^m]_*)\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{S}q_2H_{m+1}(Y')$,

(b) 如果 $\mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}([S_m]_*)=0\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{S}q_2H_{m+1}(Y')$;

則

$$\Phi''_m(\alpha')=\varphi_i\delta_{2^i}([S^m]_*)\quad\mathrm{mod}\ \mathrm{Sq}_2(H_m(Y',Z_2))+\mathrm{Sq}_1\mathscr{S}q_2(L_{i-1})+\varphi_i\,\mu_{2,0}(\mathscr{S}q_2^{-1}(0)).$$

証. 如果将 S^m 迭合为一点 Q，設所得空間为 Y''，由 Y' 到 Y'' 的迭合映象为 I. 由 Y 到 Y' 的內射映象为 L. 則 $E^{m+1}(\alpha'-2^i\beta)$ 迭合为一个 $(m+1)$ 維腔胞 $E_1^{m+1}(\alpha)$，則 $Y''=Y\cup E_1^{m+1}(\alpha')$，$IL$ 可以看为由 Y 到 Y'' 的內射映象，由于在 Y 中：

$$\Phi'_m(\alpha')=(IL)_*^{-1}\mathscr{S}q_2([E_1^{m+1}(\alpha')]_*)\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y)).$$

因此在 Y' 中：

$$\Phi'_m(\alpha')=L_*(IL)_*^{-1}\mathscr{S}q_2([E_1^{m+1}(\alpha')]_*)=$$
$$=I_*^{-1}\mathscr{S}q_2[E_1^{m+1}(\alpha')]_*=$$
$$=\mathscr{S}q_2I_*^{-1}[E_1^{m+1}(\alpha')]_*=$$
$$=\mathscr{S}q_2([E^{m+1}(\alpha'-2^i\beta)]_*)=$$

$$= \mathrm{Sq}_2([E^{m+1}(\alpha' - 2^i\beta)]_*) \mod \mathscr{S}q_2 H_{m+1}(Y').$$

前一式中的 $[E^{m+1}(\alpha' - 2^i\beta)]_*$ 表示在 $H_{m+1}(Y')$ 中同調类，而后一式中的 $[E^{m+1}(\alpha' - 2^i\beta)]_*$ 則表示在 $H_{m+1}(Y, Z_2)$ 中的同調类，在 Y' 中，显然

$$\triangle_{2^i}[E^{m+1}(\alpha' - 2^i\beta)]_* = [S^m]_*.$$

因而

$$\delta_{2^i}([S^m]_*) = [E^{m+1}(\alpha' - 2^i\beta)]_* \mod \mu_{2,0}(H_{m+1}(Y')).$$

因此在 Y' 中

$$\Phi'_m(\alpha') = \mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}([S^m]_*) \mod \mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y')).$$

如果在 Y' 中，

$$\mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}([S^m]_*) = 0 \mod \mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y')),$$

則由 (a) 可知，在 Y' 中对 α 可以施以运算 Φ''_m. 由于 $\mathscr{S}q_2([S^m]_*) = 0$. 根据 T_i 的定义也很容易說明

$[E^{m+1}(\alpha' - 2^i\beta)]_* \in T_i$，因此对 $[E^{m+1}(\alpha' - 2^i\beta)]_*$ 可施以运算 φ_i，和前面一样，同样可以証明

$$\Phi''_m(\alpha') = \varphi_i([E^{m+1}(\alpha' - 2^i\beta)]_*) \mod$$
$$\mathrm{Sq}_2 H_m(Y', Z_2) + \mathrm{Sq}_1\mathrm{Sq}_2'(L_{i-1}) + \varphi_i\mu_{2,0}\mathscr{S}q_2^{-1}(0).$$

因而

$$\Phi''_m(\alpha) = \varphi_i\delta_{2^i}[S^m]_* \mod$$
$$\mathrm{Sq}_2(H_{m+1}(Y', Z_2)) + \mathrm{Sq}_1\mathrm{Sq}_2(L_{i-1}) + \varphi_i\mu_{2,0}(\mathscr{S}q_2^{-1}(0)).$$

(証毕)

定理 1 的証明. 設 $\alpha' = 2^i\alpha$. Y, S^m, β 的意义和前面一样，假定 S^m 和 Y 只有一个公共点 O，α 是一个由 S^m 到 Y 的映象，而且 $\alpha(O) = 0$，作由 $Y \cup S^m$ 到 Y 的映象 F 如下

$$\begin{cases} F(y) = y & \text{当 } y \in Y \text{ 时}; \\ F(y) = \alpha(y) & \text{当 } y \in S^m \text{ 时}. \end{cases}$$

显然 F 是单值的，而且是連續的，由于 Y 中，$F(\alpha' - 2^i\beta) = \alpha' - 2^i F(\beta) = \alpha' - 2^i\alpha = 0$，因此 F 可以扩充为一个由 Y' 到 Y 的映象 G. 由于在 Y' 中：

$$\Phi'_m(\alpha) = \mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}([S^m]_*) \mod \mathscr{S}q_2 H_{m+1}(Y'),$$

因而在 Y 中：

$$\Phi'_m(\alpha) = G_*(\mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}[S^m]_*) = \mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}G([S^m]_*) =$$
$$= \mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}\alpha_*([S^m]_*) = \mathrm{Sq}_2\delta_{2^i}\Phi_m(\alpha) \mod \mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y'))$$

同样可以証明 (b).

(証毕)

§ 8. $C(\Pi_{n+1}(X), 2)$ 的計算

設 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 为 $\Pi_n(X)$ 的一組 C 基底，$\beta_1, \cdots, \beta_l$ 为 $\Pi_{n+1}(X)$ 的一組 C 基底，当 $1 \leqslant i \leqslant k$ 时，α_i 是一个由 S_i^n 到 X 的映象，当 $1 \leqslant i \leqslant l$ 时，β_i 是一个由 S_i^{n+1} 到 X 的映象，如果 α_i 是一个自由元素，取 $\lambda_i = 0$，如果 α_i 是一个有限次元素，取 $\lambda_i = \alpha_i$ 的次数，則 α_i 可以扩充为一个由 $S_i^n|\lambda$（这里 $S^n|0$ 表示 n 維球 S^n）到 X 的映象 α'_i，可以假定 $S_1^n|\lambda_1, \cdots,$

$\cdots, S_h^n|\lambda_k, S_1^{n+1}, \cdots, S_l^{n+1}$ 相互之間只有一个公共点 O，而且 $\alpha_1'(O)=\cdots=\alpha_k'(O)=$ $=\beta_1(O)=\cdots=\beta_l(O)$. 更設 $P=\sum_{i=1}^{k}(S_i^n|\lambda_i)\cup\sum_{i=1}^{l}(S_i^{n+1})$，作由 P 到 X 的映象 f 使

$$f(x)=\alpha_i'(x) \quad 当\ x\in S_i^n|\lambda_i \quad 1\leqslant i\leqslant k\ 时;$$
$$f(x)=\beta_i(x) \quad 当\ x\in S_i^{n+1} \quad 1\leqslant i\leqslant l\ 时.$$

显然 f 是单值的連續的，当 $m\leqslant n$ 时，$f: \Pi_m(P)\to\Pi_m(X)$ 是一个 C 同构对应. 当 $m=$ $=n+1$ 时，$f: \Pi_{n+1}(P)\to\Pi_{n+1}(X)$ 则是一个 C 满同态对应. 利用 Whitehead-Serre 定理，则 $f_*: H_n(P)\to H_n(X)$ 是一个 C 同构对应，而 $f_*: H_{n+1}(P)\to H_{n+1}(X)$ 则是一个 C 满同态对应，由于我們所考虑的問題是同倫性質，而 X 和 f 的映象柱体 X_f 又是同倫同胚的，为了下面說明方便起見，我們把 X 和 X_f 看为同一空間，而 P 则看为 X 的子集，f 则看为由 P 到 X 的內射映象，設由 X 到 (X, P) 的內射映象为 g，利用 (X, P) 的同倫羣的序列恰当性，显然下列命題成立

命題 13. (a) $\Pi_n(X, P)=1$,

(b) 当 $2\leqslant i\leqslant n+1$ 时 $\Pi_i(X, P)\in C$,

利用 Hurewicz-Serre 定理：$\Phi_{n+2}: \Pi_{n+2}(X, P)\to H_{n+2}(X, P)$ 是一个 C 同构对应，設 $H_{n+2}(X, P)/\Phi_{n+2}(\Pi_{n+2}(X, P))$ 的次数为 t，则 t 是一个奇数，对于 $H_{n+2}(X)$ 中的任意元素 u，则由于 $tg_*(u)\in\Phi_{n+2}(\Pi_{n+2}(X, P))$. 因而在 $\Pi_{n+2}(X, P)$ 中一定有一元素 α 使 $\Phi_{n+2}(\alpha)=tg_*(u)$. 我們再用 $\triangle$ 表示相对同倫羣的边緣运算. 如果把[3]中的 St_{2p-2} 换为 Sq_2，我們可以用和[3]中同样的方法及 $t=1 \mod 2$ 証明下列命題.

命題 14. 假定 α 的意义如上面所述，则

(a) $\Phi_{n+1}(\triangle(\alpha))=0$,

(b) $f_*\Phi_{n+1}'(\triangle(\alpha))=\mathscr{S}q_2(u)$.

利用命題 14 及和 [3] 中同样的方法，我們可以証明下列命題.

命題 15. $\Phi_{n+1}': \Phi_{n+1}^{-1}(0)\to H_n(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+2}(X))$ 是一个 C 同构对应.

由 [2] 定理 2，$\Phi_{n+1}(C(\Pi_{n+1}(X), 2)=C(H_{n+1}(X), 2)$，利用这些結果可以說明 $C(\Pi_{n+1}(X), 2)$ 是羣 $H_n(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+2}(X))$ 被羣 $C(H_{n+1}(X), 2)$ 的扩充，而定理 1 则說明了这个扩充的代数构造，这样 $C(\Pi_{n+1}(X), 2)$ 就完全确定了. 由此可得出 Hilton 关于 $\Pi_{n+1}(A_n^2)$ $(n\geqslant 3)$ 的結果.

如果 (Y, B) 是一个适合下列条件的弧連通空間对：

(a) $\Pi_1(B)=1$,

(b) $\Pi_1(X)=1$,

(c) $\Pi_2(X, B)=1$,

和(1)中一样. 利用把 B 迭合为一点的办法，同样可以定义由 $\Pi_m(Y, B)$ 中的子羣 $\Phi_m^{-1}(0)$ 到 $H_{m-1}(Y, B)/\mathscr{S}q_2(H_{m+1}(Y, B))$ 的模 2 的第二类自然同态对应，和前面一样，如果 (Y, B) 还适合下列条件：

(a) $\Pi_2(B)\in C$,

(b) 当 $2\leqslant i\leqslant n-1$ 时，$\Pi_i(Y, B)\in C$,

命題 15 中的 X，如果换为空間对 (Y, B) 时，命題 15 仍旧成立.

§9. 多面体 P 的性質

假定 P, $S_i^n|\lambda_i$, S_i^{n+1} 的意义同 §8 一样, 利用 $H_n(P, Z_2) = \sum_{i=1}^{k} H_n(S_i^n|\lambda_i, Z_2)$, $H_{n+1}(P, Z_2) = \sum_{i=1}^{k} H_{n+1}(S_i^n|\lambda_i, Z_2) + \sum_{i=1}^{l} H_{n+1}(S_i^{n+1}, Z_2)$, $\Pi_{n+2}(P) = \sum_{i=1}^{k} \Pi_{n+2}(S_i^n|\lambda_i) + \sum_{i=1}^{l} \Pi_{n+2}(S_i^{n+1})$ 以及第二部分所叙述的在多面体 $S_i^n|\lambda_i$, S_i^{n+1} 中 Φ'_{n+2} 及 Φ''_{n+2} 的性質. 我們有下列結論.

命題 16. 在多面体 P 中, 下列性質成立:

(a) Φ'_{n+2}: $\Pi_{n+2}(P) \to H_{n+1}(P, Z_2)$ 是一个滿同态对应,

(b) Φ''_{n+2}: $\Phi'^{-1}_{n+2}(0) \to H_n(P, Z_2)$ 是一个同构对应,

(c) 对 $\Pi_{n+2}(P)$ 中的任意元素 α:

$\Phi''_{n+2}(2\alpha) = \mathrm{Sq}_1 \Phi'_{n+1}(\alpha)$,

(d) $\Phi'^{-1}_{n+2}(0) = \Pi_n(P) \circ \eta_n^{n+2}$, 这里 η_n^{n+2} 表示 $\Pi_{n+2}(S^n)$ 中的母元素.

証. 前面的說明卽是(a), (b), (c)的証明, 現在我們只証明(d), 显然$(\Pi_n(P) \circ \eta_n^{n+2}) \subset \Phi'^{-1}_{n+2}(0)$, 我們只証明 $\Phi'^{-1}_{n+2}(0) \subset \Pi_n(P) \circ \eta_n^{n+2}$, 設 $\beta \in \Phi'^{-1}_{n+2}(0)$, $\Phi''_{n+2}(\beta) = u$, 在 $H_n(P)$ 中一定有一 v 使 $\mu_{2,0}(v) = u$, 由于 Φ_n: $\Pi_n(P) \to H_n(X)$ 是一个同构对应, 在 $\Pi_n(P)$ 中一定有一 γ 使 $\Phi_n(\gamma) = v$. 由命題 11, $\Phi''_{n+2}(\gamma \circ \eta_n^{n+2}) = \mu_{2,0}\Phi_n(\gamma) = \mu_{2,0}(v) = u = \Phi''_{n+2}(\beta)$, 由于 Φ''_{n+2}: $\Phi'^{-1}_{n+2}(0) \to H_n(P, Z_2)$ 是一个同构对应, 因而 $\beta = \gamma \circ \eta_n^{n+2} \in \Pi_n(P) \circ \eta_n^{n+2}$, 所以 (d) 成立.

(証毕)

为了下面的說明不致引起混淆, 設 Y 为任一单連通空間, $\Pi_{n+2}(Y)$ 的子羣 $\Phi'^{-1}_{n+2}(0)$ 用 $\Phi'^{-1}_{n+2,Y}$ 表示.

命題 17. 在空間 X 中, 下列关系成立:

(a) $C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2) = f(\Pi_{n+2}(P))$,

(b) $C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2) = f(\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0))$.

証. (a) 的証明, 显然 $f(\Pi_{n+2}(P)) \subset C(\Phi'_{n+2,X}(0), 2)$, 現在只証 $C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2) \subset f(\Pi_{n+2}(P))$. 設 $\alpha \in C(\Phi'^{-1}_{n+2}(0), 2)$, 考慮下列同倫羣序列:

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_{n+2}(P) & \xrightarrow{f} & \Pi_{n+2}(X) & \xrightarrow{g} & \Pi_{n+2}(X, P) \\ \downarrow \Phi_{n+2} & & \downarrow \Phi_{n+2} & & \downarrow \\ H_{n+2}(P) = 0 & \xrightarrow{f_*} & H_{n+2}(X) & \xrightarrow{g_*} & H_{n+2}(X, P). \end{array}$$

由于 $\Phi_{n+2}(\alpha) = 0$, $\alpha \in C(\Pi_{n+2}(X), 2)$, 因而 $\Phi_{n+2}(g(\alpha)) = g_* \Phi_{n+2}(\alpha) = 0$. $g(\alpha) \in C(\Pi_{n+2}(X, P), 2)$, 利用$(X, P)$是 $(n+1)$—C—連通的, Φ_{n+2}: $\Pi_{n+2}(X, P) \to H_{n+2}(X, P)$ 是一个 C 同构对应, 因此 $g(\alpha) = 0$, 所以 $\alpha \in f(\Pi_{n+2}(P))$, 这样(a)得到証明.

(b) 的証明. 显然 $f(\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0) \subset C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2)$, 現在只証明 $C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2) \subset f(\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0))$. 設 $P^n = \sum_{i=1}^{k} S_i^n$, 由 P^n 到 P 的內射映象用 h 表示, 由 P^n 到 X 的內射映

象 fh 則用 f_1 表示，由 X 到 (X, P^n) 的內射映象則用 g_1 表示，我們很容易說明：i) $\Pi_n(P) = h(\Pi_n(P^n))$；ii) $\Phi'^{-1}_{n+2,P} = \Pi_n(P)\circ\eta_n^{n+2} = h(\Pi_n(P^n)\circ\eta_n^{n+2}) = h(\Pi_n(P^n)\circ\eta_n^{n+2}) = h(\Pi_{n+2}(P_n))$；iii) 由于当 $m \leqslant n-1$ 时 $f_1: \Pi_m(P^n)\to\Pi_m(X)$ 是一个 C 同构对应，$f_1: \Pi_n(P^n)\to\Pi_n(X)$ 是一个 C 满同态对应，因此 $m\leqslant n$ 时．$\Pi_m(X, P^n) = 0$．考虑下列图形：

$$\begin{array}{ccccc}
\Pi_{n+2}(P^n) & \xrightarrow{f_1} & \Phi'^{-1}_{n+2,X}(0) & \xrightarrow{g_1} & \Phi'^{-1}_{n+2,(X,P^n)}(0) \\
\downarrow & & \downarrow \Phi'_{n+2} & & \downarrow \Phi'_{n+2} \\
0 & \longrightarrow & H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X)) & \rightarrow & H_{n+1}(X, P^n, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X, P^n))
\end{array}$$

这里，$\Phi^{-1}_{n+2,X}(0)$ 表示 $\Pi_{n+2}(X)$ 中的子羣 $\Phi^{-1}_{n+2}(0)$．而 $\Phi^{-1}_{n+2,(X,P^n)}(0)$ 則表示 $\Pi_{n+2}(X, P^n)$ 的子羣 $\Phi^{-1}_{n+2}(0)$．由于 (X, P^n) 是 n—C—連通的．因而 $\Phi'_{n+2}: \Phi^{-1}_{n+2,(X,P^n)}(0)\to H_{n+1}(X, P^n, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X, P^n))$ 是一个 C 同构对应．

設 $\alpha\in C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2)$，則 $\Phi'_{n+2}(g_1(\alpha)) = g_{1*}(\Phi'_{n+2}(\alpha)) = 0$，由于 $\Phi'_{n+2}: \Phi^{-1}_{n+2.}(X, P^n)\to H_{n+1}(X, P^n, Z_2)/\mathscr{S}q_2H_{n+3}(X, P^n)$ 是一个 C 同构对应，因而 $g_1(\alpha)=0$，利用 (X, P^n) 的同倫序列的恰当性，我們馬上有 $\alpha\in f_1(\Pi_{n+2}(P^n))$．所以 $C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2)\subset f_1(\Pi_{n+2}(P^n)) = fh\Pi_{n+2}(P^n) = f(h(\Pi_{n+2}(P^n)) = f(\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0))$，所以 $C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2) = f(\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0))$．

利用命題 17．我們有下述定理．

定理 6． 在空間中 X 中，$C(\Phi'^{-1}_{n+2}(0), 2) = \Pi_n(X)\circ\eta_n^{n+2}$．

証． 显然 $\Pi_n(X)\circ\eta_n^{n+2}\subset C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2)$．由于

$$C(\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0), 2) = f(\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0)) = f(\Pi_n(P)\circ\eta_n^{n+2}) = \\ = f(\Pi_n(P))\circ\eta_n^{n+2}\subset\Pi_n(X)\circ\eta_n^{n+2},$$

因此

$$C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2) = \Pi_n(X)\circ\eta_n^{n+2}.$$

（証毕）

根据 P 的作法，当 $m\geqslant n+2$ 时 $H_m(P) = 0$，当 $m\leqslant n$ 时，$f: \Pi_m(P)\to\Pi_m(X)$ 是一个 C 同构对应．利用 (X, P) 的同倫序列及同調序列的恰当性，我們馬上有下列命題．

命題 18． (a) (X, P) 是 $n+1$—C—連通的，

(b) 当 $m\geqslant n+3$ 时，$f_*: H_m(X)\to H_m(X, P)$ 是一个同构对应，而 $f_*: H_{n+2}(X)\to H_{n+2}(X, P)$ 是一个一一同态对应．

§10. 定理 2 的証明

考虑下列图形：

$$\begin{array}{ccccccc}
\Pi_{n+2}(P) & \xrightarrow{f} & \Pi_{n+2}(X) & \xrightarrow{g} & \Pi_{n+2}(X, P) & \xrightarrow{\triangle} & \Pi_{n+1}(P) \\
\downarrow \Phi_{n+2} & & \downarrow \Phi_{n+2} & & \Phi_{n+2}\downarrow & & \downarrow \\
H_{n+2}(P) = 0 & \rightarrow & H_{n+2}(X) & \xrightarrow{g_*} & H_{n+2}(X, P) & \xrightarrow{\partial} & H_{n+1}(P)
\end{array}$$

設 $u\in C(H_{n+2}(X), 2)$，$\mathscr{S}q_2(u) = 0$，則 $g_*(u)\in C(H_{n+2}(X, P), 2)$，由于 (X, P) 是 $(n+1)$ 維 C 連通的，在 $\Pi_{n+2}(X, P)$ 中一定有一元素 α 使 $\Phi_{n+2}(\alpha) = g_*(u)$．由命題 14，$f_*\Phi'_{n+1}(\triangle(\alpha)) = \mathscr{S}q_2 u = 0$．由于 $f_*: H_n(P, Z_2)\to H_{n+1}(X, Z_2)$ 是一个同构对应，我們有 $\Phi'_{n+1}(\triangle(\alpha)) = 0$；由于在 P 中，$\Phi'_{n+1}: \Phi^{-1}_{n+1}(0)\to H_n(P, Z_2)$ 是一个同构对应，因而

$\triangle(\alpha)=0$. 利用同倫羣序列的恰当性，在 $\Pi_{n+2}(X)$ 中一定有一元素 β 使 $g(\beta)=\alpha$. 利用 $g_*\Phi_{n+2}(\beta)=\Phi_{n+2}g(\beta)=\Phi_{n+2}(\alpha)=g_*(u)$. 及 $g_*: H_{n+2}(X)\to H_{n+2}(X,P)$ 是一个一一同态对应，因而 $\Phi_{n+2}(\beta)=u$, 即 u 是一个球面元素.

§11. 定理 3 的証明

考慮下列可交換图形:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{n+2}(P) & \xrightarrow{f} & \Phi^{-1}_{n+2,X}(0) \\ \downarrow \Phi'_{n+2} & & \downarrow \Phi'_{n+1} \\ H_{n+1}(P,Z_2) & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(X,Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+2}(X)) \end{array}$$

由于 $\Phi'_{n+2}: \Pi_{n+2}(P)\to H_{n+1}(P,Z_2)$ 是滿同态对应，而 $f_*: H_{n+1}(P,Z_2)\to H_{n+1}(X,Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+2}(X))$ 也是滿同态对应. 由于 $\Phi'_{n+2}f=f_*\Phi'_{n+2}$, 我們馬上可以說明 $\Phi'_{n+2}:\Phi^{-1}_{n+2}(0)\to\to H_{n+1}(X,Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+2}(X))$ 是一个滿同态对应.

§12. 定理 4 的証明

設 $u\in H_{n+3}(X)$. 則由于 (X,P) 是 $(n+1)$—C—連通的，$\Phi_{n+3}: \Pi_{n+3}(X,P)\to H_{n+3}\times\times(X,P)$ 是一个 C 滿同态对应，一定有一奇数 t 使 $tg_*(u)\in\Phi_{n+3}(\Pi_{n+3}(X,P))$, 因之一定有一元素 α, $\alpha\in\Pi_{n+3}(X,P)$ 使 $\Phi_{n+3}(\alpha)=tg_*(u)$, 和命題 14 一样，可以証明 $f_*\Phi'_{n+2}(\triangle(\alpha))==\mathscr{S}q_2u$, 如果 $\mathscr{S}q_2(u)=0$, 由于我們可以很容易說明 $f_*: H_{n+1}(P,Z_2)\to H_{n+1}(X,Z_2)$ 也是一个同构对应，因而 $\Phi'_{n+2}(\triangle(\alpha))=0$, 則对 $\triangle(\alpha)$ 可施以对应 Φ''_{n+2}, 我們有下述命題.

命題 19. $f_*\Phi''_{n+2}(\triangle(\alpha))=\theta(u)\mod$

$$\mathrm{Sq}_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))+\mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X,Z_2)).$$

証. 設 α 是一个由 $(E^{n+3}, E^{(n+3)\cdot})$[1] 到 (X,P) 的映象而且設

$$P_1=P\cup E_1^{n+3}(\triangle(\alpha)),$$

則在 P_1 中，$\mathrm{Sq}_2[E_1^{n+3}(\triangle(\alpha))]_*=\tau_*(\Phi'_{n+2}(\triangle(\alpha))$, 这里 τ 表示由 P 到 P_1 的內射映象，由于在 P 中，$\Phi'_{n+1}(\triangle(\alpha))=0$. 因此在 P_1 中 $\mathscr{S}q_2([E_1^{n+3}(\triangle(\alpha))]_*)=0$. 根据 §5 中 Φ'_m 的定义，$\theta([E_1^{n+3}(\triangle(\alpha))]_*)=\tau_*\Phi''_{n+3}(\triangle(\alpha))$.

作由 P_1 到 X 的映象 l 如下:

$$l(x)=f(x)\quad \text{当 } x\in P \text{ 时},$$

$$l(x)=\alpha(x)\quad \text{当 } x\in E_1^{n+3}(\triangle(\alpha)) \text{ 时}.$$

利用 $E_1^{n+3}(\triangle(\alpha_1))$ 的作法，很容易說明 l 是单值的，而且是連續的、并且对 P 上任意 x, $f(x)=l\tau(x)$. 根据 l 的作法，显然 $g_*l_*([E_1^{n+3}(\triangle(\alpha))])_*=\alpha_*([E^{n+3}, E^{(n+3)\cdot}]_*=tg_*(u)$. 利用 $g_*: H_{n+3}(X)\to H_{n+3}(X,P)$ 是一个一一同态对应. 因而

$$l_*([E_1^{n+3}(\triangle(\alpha))]_*)=tu,$$

則

$$\theta(tu)=\theta l_*(E_1^{n+3}(\triangle(\alpha)))_*=l_*\theta(E_1^{n+3}(\triangle(\alpha))_*)=l_*(\tau_*(\Phi''_{n+2}(\triangle(\alpha))=$$

---

1) $E^{(n+3)\cdot}$ 表示 $(n+3)$ 維单形 E^{n+3} 的边界.

$= f_* \Phi''_{n+2}(\Delta(\alpha)) \mod \mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X, Z_2)) + \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+3}(X))$.
由于 $t = 1 \mod 2$, 因而 $\theta(u) = \theta(tu) = f_* \Phi''_{n+2}(\Delta(\alpha)) \mod \mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X, Z_2)) +$ $+ \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+3}(X))$.

(証毕)

命题 20. 設 α 为 $\Pi_{n+2}(P)$ 中的一个元素, 如果 $\Phi'_{n+1}(\alpha) = 0$, $f_* \Phi''_{n+2}(\alpha) \in \mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X, Z_2))$, 則 $f(\alpha) = 0$.

証. 在 $H_{n+2}(X, Z_2)$ 中一定有一 v 使 $f_* \Phi''_{n+2}(\alpha) = \mathrm{Sq}_2(v)$, 則 $\Delta_2(v) \in C(H_{n+1}(X), 2)$. 由于 $\Phi_{n+1}: \Pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ 是一个 C 满同态对应, 而且 $\Phi'^{-1}_{n+1}(0)$ 是一个有限羣, 因之在 $C(\Pi_{n+1}(X), 2)$ 中一定有一元素 β 使 $\Phi_{n+1}(\beta) = \Delta_2(v)$. 則由定理 1, $\Phi'_{n+1}(2\beta) = \mathrm{Sq}_2 \delta_2(\Delta_2(v)) = \mathrm{Sq}_2(v) \mod \mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+2}(X))$.

另一方面, 由命題 16(d), 在 $\Pi_n(P)$ 中一定有一 τ 使 $\alpha = \tau \circ \eta_n^{n+2}$, 由于 $\eta_n^{n+2} = \eta_n^{n+1} \circ \eta_{n+1}^{n+2}$, 則在 P 中, $\Phi''_{n+2}(\alpha) = \mu_{2,0} \Phi_n(\tau) = \Phi'_{n+1}(\tau \circ \eta_n^{n+1})$, 因而在 X 中, $\Phi'_{n+1} f(\tau \circ \eta_n^{n+1}) = f_* \Phi'_{n+1}(\tau \circ \eta_n^{n+1}) = f_* \Phi''_{n+2}(\alpha) = \mathrm{Sq}_2 v = \Phi'_{n+1}(2\beta) \mod \mathscr{S} \mathrm{q}_2 H_{n+2}(X)$, 由于在 X 中 $\Phi'_{n+1}: \Phi^{-1}_{n+1}(0) \to H_n(X, Z_2)/\mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+1}(X))$ 是一个 C 同构对应, 而 $f(\tau \circ \eta_n^{n+1}) \in C(\Pi_{n+1}(X), 2)$, $2\beta \in C(\Pi_{n+1}(X), 2)$, 因而 $f(\tau \circ \eta_n^{n+1}) = 2\beta$, 則 $f(\alpha) = f(\tau \circ \eta_n^{n+1} \circ \eta_{n+1}^{n+2}) = f(\tau \circ \eta_n^{n+1}) \circ \eta_{n+1}^{n+2} = 2\beta \circ \eta_n^{n+2} = \beta \circ (2\eta_n^{n+2}) = 0$.

(証毕)

命题 21. 設 α 为 $\Pi_{n+2}(P)$ 中的元素, 如果 $\Phi'_{n+2}(\alpha) = 0$, $f_* \Phi''_{n+2}(\alpha) \in \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+3}(X))$, 則 $f(\alpha) = 0$.

証. 在 $H_{n+3}(X)$ 中一定有一元素 u 使 $f_* \Phi''_{n+1}(\alpha) = \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(u)$. 由于 $f_*: H_{n+1}(P, Z_2) \to H_{n+1}(X, Z_2)$ 是一个同构对应, 在 $H_{n+1}(X, Z_2)$ 中一定有一元素 v 使 $f_*(v) = \mathscr{S} \mathrm{q}_2(u)$, 則 $f_*(\Phi''_{n+2}(\alpha) - \mathrm{Sq}_1(v)) = \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2 u - \mathrm{Sq}_1 f_*(v) = \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(u) - \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(u) = 0$, 由于 $f_*: H_n(P, Z_2) \to H_n(X, Z_2)$ 是一个同构对应, 我們馬上有 $\Phi''_{n+2}(\alpha) = \mathrm{Sq}_1(v)$, 又由于在 P 中, Φ'_{n+2} 是一个满同态对应, 在 $\Pi_{n+2}(P)$ 中一定有一元素 β 使 $\Phi'_{n+2}(\beta) = v$, 則 $\Phi''_{n+2}(2\beta) = \mathrm{Sq}_1 \Phi'_{n+2}(\beta) = \mathrm{Sq}_1(v) = \Phi''_{n+2}(\alpha)$. 由于在 P 中, Φ''_{n+2} 是一个同构对应, 因而我們有 $2\beta = \alpha$.

由于在 X 中, $\Phi'_{n+2}(f\beta) = f_* \Phi'_{n+2}(\beta) = f_*(v) = \mathrm{Sq}_2(u) \mod \mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+3}(X))$, 因而 $\Phi'_{n+1}(f\beta) = 0$, 則 $f(\beta) \in \Pi_n(X) \circ \tau_n^{n+2}$, 因而 $f(\alpha) = f(2\beta) = 2f(\beta) \in \Pi_n(X) \circ 2\tau_n^{n+2} = 0$.

(証毕)

定理 4 的証明. 要証明 Φ''_{n+2} 是一个 C 同构对应, 由于 $\Phi'^{-1}_{n+2}(0)$ 是一个有限羣. 我們只要証明 Φ''_{n+2} 引起一个 $C(\Phi^{-1}_{n+2}(0), 2)$ 到 $H_n(X, Z_2)/\mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X, Z_2)) + \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+3}(X)) + \theta(\mathscr{S} \mathrm{q}_2^{-1}(0))$ 的同构对应即可.

由于 $\Phi''_{n+2}: \Phi'^{-1}_{n+2,P}(0) \to H_n(P, Z_2)$ 是一个同构对应, 而 $f_*: H_n(P, Z_2) \to H_n(X, Z_2)$ 又是一个同构对应. 利用 $\Phi''_{n+2} f = f_* \Phi''_{n+2}$ 及 $f(\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0)) \subset C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2)$. 显然 Φ''_{n+2} 引起一个由 $C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2)$ 到 $H_n(X, Z_2)/\mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X, Z_2)) + \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+3}(X)) + \theta(\mathscr{S} \mathrm{q}_2^{-1}(0))$ 的满同态对应.

如果 $\alpha \in C(\Phi'^{-1}_{n+2,X}(0), 2)$ 而且 $\Phi''_{n+2}(\alpha) = 0$, 我們将証明 $\alpha = 0$. 由命題 17. 在 $\Pi_{n+2}(P)$ 中一定有一个 α_1 使 $f(\alpha_1) = \alpha$, 而且 $\Phi'_{n+2}(\alpha_1) = 0$, 由于 $\Phi''_{n+2}(\alpha) = f_* \Phi''_{n+2}(\alpha_1) = 0 \mod \mathrm{Sq}_2(H_{n+3}(X, Z_2)) + \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} \mathrm{q}_2(H_{n+3}(X)) + \theta(\mathscr{S} \mathrm{q}_2^{-1}(0))$, 則在 $H_{n+3}(X)$ 中一定

有元素 u 使 $\mathscr{S}q_2(u)=0$. 而且 $\theta(u)=f_*\Phi''_{n+2}(\alpha_1)\mod Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))+Sq_1\mathscr{S}q_2H_{n+3}(X)$, 按照命题 19, 在 $\Pi_{n+3}(X,P)$ 中一定有一元素 β 使 $f_*\Phi''_{n+2}(\Delta(\beta))=\theta(u)\mod Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))+\mathscr{S}q_1Sq_2(H_{n+3}(X))$, 因而 $f_*(\Phi''_{n+2}(\alpha_1-\Delta(\beta))=\theta(u)-\theta(u)=0\mod Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))+Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$, 在 $H_{n+3}(X)$ 及 $H_{n+2}(X,Z_2)$ 中分别有元素 u'_1 及 u'_2 使 $f_*(\Phi''_{n+2}(\alpha_1-\Delta(\beta))=Sq_1\mathscr{S}q_2(u'_1)+Sq_2(u'_2)$, 由于 $f_*: H_n(P,Z_2)\to H_n(X,Z_2)$ 是一个同构对应, 在 (P,Z_2) 中一定有两个元素 u_1 和 u_2 使 $f_*(u_1)=Sq_1\mathscr{S}q_2(u'_1)$, $f_*(u_2)=Sq_2(u'_2)$, 由命题 16, 在 P 中, $\Phi''_{n+2}: \Phi'^{-1}_{n+2,P}(0)\to H_n(P,Z_2)$ 是一个同构对应, 在 $\Phi'^{-1}_{n+2,P}(0)$ 中一定有两个元素 β_1 和 β_2 使 $\Phi''_{n+2}(\beta_1)=u_1$, $\Phi''_{n+2}(\beta_2)=u_2$, 则

$$f_*(\Phi''_{n+2}(\alpha_1-\Delta(\beta)-\beta_1-\beta_2))=Sq_1\mathscr{S}q_2(u'_1)+Sq_2(u'_2)-$$
$$-f_*(u_1)-f_*(u_2)=Sq_1\mathscr{S}q_2(u'_1)+Sq_2(u'_2)-Sq_1\mathscr{S}q_2(u'_1)-Sq_2(u'_2)=0.$$

由于 $f_*: H_n(P,Z_2)\to H_n(X,Z_2)$ 是一个同构对应, 我們馬上有

$$\Phi''_{n+2}(\alpha_1-\Delta(\beta)-\beta_1-\beta_2)=0.$$

由于 $\Phi''_{n+2}: \Phi'^{-1}_{n+2,P}(0)\to H_n(P,Z_2)$ 是一个同构对应, 我們有

$$\alpha_1-\Delta(\beta)-\beta_1-\beta_2=0.$$

卽

$$\alpha_1=\Delta(\beta)-\beta_1-\beta_2.$$

利用同倫序列的恰当性可以說明 $f\Delta(\beta)=0$. 由于 $f_*\Phi''_{n+2}(\beta_1)=Sq_1\mathscr{S}q_2u'_1\in Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$, $f_*\Phi''_{n+1}(\beta_2)=Sq_2u'_2\in Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))$, 由命题 20 及命题 21, 我們有 $f(\beta_1)=$ $=f(\beta_2)=0$, 因而

$$\alpha=f(\alpha_1)=f\Delta(\beta)-f(\beta_1)-f(\beta_2)=0.$$

所以 Φ''_{n+2} 引起一个由 $C(\Phi'^{-1}_{n+2,X},2)$ 到 $H_n(X,Z_2)/Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))+Sq_2H_{n+2}(X,Z_2)+$ $+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 的同构对应.

(証毕)

§13. 定理 5 的証明

对于 $\Phi^{-1}_{n+2}(0)$ 中的任意元素 α, 利用 $\Phi^{-1}_{n+2}(0)$ 是一个有限羣, 則 α 可以写为 $\alpha_1+\alpha_2$ 的形状, 其中 α_1 是一个次数为奇数的元素, $\alpha_2\in C(\Phi^{-1}_{n+2}(0),2)$, 显然 $\Phi'_{n+1}(\alpha_1)=0$, $\Phi''_{n+2}(2\alpha_1)=0$, 因而

$$\Phi''_{n+1}(2\alpha_1)=Sq_1\Phi'_{n+2}(\alpha_1).$$

对 α_2 来說, 由命题 17, 在 $\Pi_{n+2}(P)$ 中一定有一元素 α'_2 使 $f(\alpha'_2)=\alpha_2$. 由命题 16, 在 P 中, 下列关系成立

$$\Phi''_{n+2}(2\alpha'_2)=Sq_1\Phi'_{n+2}(\alpha'_2).$$

因而在 X 中

$$\Phi''_{n+2}(2\alpha_2)=\Phi''_{n+2}f(2\alpha'_2)=f_*\Phi''_{n+2}(2\alpha'_2)=f_*Sq_1\Phi'_{n+2}(\alpha'_2)=$$
$$=Sq_1\Phi_{n+2}(f(\alpha'_2))=Sq_1\Phi_{n+2}(\alpha_2)\mod$$
$$Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))+\mathscr{S}q_2(H_{n+2}(X,Z_2))+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0)).$$

这样我們馬上有

$$\Phi''_{n+2}(2\alpha)=\Phi''_{n+2}(2\alpha_1+2\alpha_2)=\Phi''_{n+2}(2\alpha_2)=Sq_1\Phi'_{n+2}(\alpha_2)=$$

$$= \mathrm{Sq}_1 \Phi'_{n+2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathrm{Sq}_1 \Phi'_{n+2}(\alpha) \mod \mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X, Z_2)) +$$
$$+ \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S} q_2(H_{n+3}(X)) + \theta(\mathscr{S} q_2^{-1}(0)).$$

（証毕）

第四部分 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$的构造

§14. 羣的扩充的簡单性質

为了說明定理1—5能确定$C(\Pi_{n+2}(X), 2)$的代数构造，我們首先介紹一些羣的扩充的一些基本性質。

設A, B为任意两个交換羣，C为任一有限交換羣．假定下列序列为一恰当序列

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow O$$

即B为A被C的扩充，一般称i为这个扩充的內射对应，而j为这个扩充的射影对应，設$C_1, \cdots, C_\tau$为C的任何一組基底$\lambda_1, \cdots, \lambda_\tau$为$c_1, \cdots, c_\tau$的次数，在$B$中一定有一組元素$b_1, \cdots, b_\tau$使$j(b_1) = c_1, \cdots, j(b_\tau) = c_\tau$，在$A$中一定有一組元素$a_1, \cdots, a_\tau$使$i(a_1) = \lambda_1 b_1, \cdots i(a_\tau) = \lambda_\tau b_\tau$，我們称$a_1, \cdots, a_\tau$为这个扩充中的对于$C$中基底$\{c_1, \cdots, c_\tau\}$的一組綫性关連元素，我們将說明，$B$的构造由$A, B$及$a_1, \cdots, a_\tau$所确定．設$[c'_1, \cdots, c'_\tau]$为任意一組綫性无关的自由元素，$C' = [c'_1, \cdots, c'_\tau]$，假定$C'$和$A$只有一个公共元素0，則我們有下述命題．

命題22. $B \approx (A + C')/[\lambda_1 c'_1 - a_1 \cdots, \lambda_\tau c'_\tau - a_\tau]$.

証． 作由$A + C'$到B的对应φ如下，对于$A + C'$中的任意元素$a + \sum_{k=1}^{\tau} l_k c'_k$，其中$a \in A$而$l_1, \cdots, l_\tau$为一些整数，規定

$$\varphi\left(a + \sum_{k=1}^{\tau} l_k c'_k\right) = i(a) + \sum_{k=1}^{\tau} l_k b_k.$$

显然$l(A + C') = B$，我們将証明$\varphi^{-1}(0) = [\lambda_1 c'_1 - a_1, \cdots, \lambda_\tau c'_\tau - a_\tau]$，显然$[\lambda_1 c'_1 - a_1, \cdots, \lambda_\tau c'_\tau - a_\tau] \subset \varphi^{-1}(0)$．設$a + \sum_{k=1}^{\tau} l_k c'_i$为$\varphi^{-1}(0)$中的任何一个元素，由于

$$j\varphi\left(a + \sum_{k=1}^{\tau} l_k c'_k\right) = ji(a) + \sum_{k=1}^{\tau} l_k j(b_k) = \sum_{k=1}^{\tau} l_k c_k = 0.$$ 而$c_1, \cdots, c_k$是C的一組基底，因而$l_1 = 0 \mod \lambda_1, \cdots, l_\tau = 0 \mod \lambda_\tau$，則

$$\varphi\left(a + \sum_{k=1}^{\tau} l_k c'_k - \sum_{k=1}^{\tau} \frac{l_k}{\lambda_k}(\lambda_k c'_k - a_k)\right) =$$
$$= \varphi\left(a + \sum_{k=1}^{\tau}\left(\frac{l_k}{\lambda_k} a_k\right)\right) = 0.$$

由于$a - \sum_{k=1}^{\tau} \frac{l_k}{\lambda_k} a_k \in A$，而$\varphi$引起一个由$A$到$A$的同构对应，因而$a + \sum_{k=1}^{\tau} \frac{l_k}{\lambda_k} a_k = 0$，所以$a = -\sum_{k=1}^{\tau} \frac{l_k}{\lambda_k} a_k$．因而，$a + \sum_{k=1}^{\tau} l_k c'_k = \sum_{k=1}^{\tau} \frac{l_k}{\lambda_k}(\lambda_k c'_k - a_k) \in [\lambda_1 c'_1 - a_1, \cdots,$

$\lambda_r c'_r - a_r$]，即 $\varphi^{-1}(0) \subset [\lambda_1 c'_1 - a_1, \cdots, \lambda_r c'_r - a_r]$，因而 $\varphi^{-1}(0) = [\lambda_1 c'_1 - a_1, \cdots, \lambda_r c'_r - a_r]$. 所以 $B \approx (A + C')/[\lambda_1 c'_1 - a_1, \cdots, \lambda_r c'_r - a_r]$.

（証毕）

根据上面的說明，不独由 B 及 i, j 可以确定这个扩充的对于 A, C 中基底 $c_1, \cdots, c_r$ 的一組关連元素，反之也可以由这一組关連元素組 $a_1, \cdots, a_r$ 确定 i, j, B.

利用命題 22，我們很容易証明下列命題.

命題 23. 設 A 和 A_1 为两个同构的交换羣. f: $A \to A_1$ 为一个同构对应，C 和 C_1 为两个同构的有限交换羣，h: $C \to C_1$ 为一个同构对应，如果 B 是 A 被 C 的扩充，i, j 为这个扩充的內射对应和射影对应，$a_1, \cdots, a_r$ 为这个扩充的对于 C 中基底的 $c_1, \cdots, c_r$ 的一組关連元素，B_1 为 A_1 被 C_1 的扩充，i_1, j_1 为这个扩充的內射对应和射影对应，如果 $f(a_1), \cdots, f(a_r)$ 是这个扩充的对于 C_1 中基底 $h(c_1), \cdots, h(c_r)$ 的一組关連元素，一定有一个由 B 到 B_1 的同构对应 g: $B \to B_1$ 使下列图形

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{i_1} & B_1 & \xrightarrow{j_1} & C_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

是可交换的，即 $i_1 f = gi$, $hj = j_1 g$.

如果用 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 表示 $a_1, \cdots, a_r$ 的次数，$b_1, \cdots, b_r$ 为 B 中任何一組适合条件 $\lambda_1 b_1 = i(a_1), \cdots, \lambda_r(b_r) = i(a_r), j(b_1) = c_1, \cdots, j(b_r) = c_r$ 的元素，$b'_1, \cdots, b'_r$ 为 B_1 中任何一組适合条件 $\lambda_1 b'_1 = i_1 f(a), \cdots, \lambda_r b'_r = i_1 f(a_r), j_1(b'_1) = h(c_1), \cdots, j_1(b'_r) = h(c_r)$ 的元素，我們还可以选择同构对应 g 使 $g(b_1) = b'_1, \cdots, g(b_r) = b'_r$.

§ 15. $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的对于运算 Sq_2 的标准基底

命題 24. 在 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 中可以选出一組适合下列条件的一組基底 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t$:

i). 在 $H_{n+1}(X)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$ 中，$\mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{l_1}}(a_1), \cdots, \mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{l_s}}(a_s)$ 是模 2 綫性无关的.

ii). 在 $H_{n+1}(X)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$, $\mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{m_1}}(b_1) = 0, \cdots = \mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{m_t}}(b_t) = 0$.

这里 $2^{l_1}, \cdots, 2^{l_s}, 2^{m_1}, \cdots, 2^{m_t}$ 分别表示 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t$ 的次数.

証. 設 $c_1, \cdots, c_r$ 为 $C(H_{n+2}(X)) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的一組基底. 而 $2^{q_1}, \cdots, 2^{q_r}$ 为 $C_1, \cdots, C_r$ 的次数，可以假定 $2^{q_1} \geqslant 2^{q_2} \geqslant \cdots \geqslant 2^{q_r}$.

如果 $\mathrm{Sq}_2\delta_{2^{q_1}}(c_1) \neq 0$，則取 $a_1 = c_1$，如果 $\mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{q_1}}(c_1) = 0$. 則取 $b_1 = c_1$，假定我們巳作出一組元素 $a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_j$ 使① $\mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{l_1}}(a_1), \cdots, \mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{l_i}}(a_i)$ 是模 2 綫性无关的，这里 $2^{l_1}, \cdots, 2^{l_i}$ 表示 $a_1, \cdots, a_i$ 的次数，② $\mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{m_1}}(b_1) = \cdots = \mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{m_j}}(b_j) = 0$，这里 $2^{m_1}, \cdots, 2^{m_j}$ 表示 $b_1, \cdots, b_j$ 的次数，③ $a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_j, c_{i+j+1}, \cdots, c_r$ 为 $C(H_{n+2}(X), 2 \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的一組基底，④ 所有的 $l_1, \cdots, l_i, m_1, \cdots, m_j$ 都不小于 $q_{i+j+1}, \cdots, q_r$.

如果在 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X)$ 中，$\mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{q_{i+j+1}}}(c_{i+j+1})$ 与 $\mathrm{Sq}_2\,\delta_{2^{l_1}}(a_1), \cdots,$

$Sq_2\,\delta_2^{l_i}(a_i)$ 是模 2 綫性无关的，則取 $a_{i+1}=c_{i+j+1}$，如果 $Sq_2\,\delta_2^{q_{i+j+1}}(c_{i+j+1})$ 与 $Sq_2\,\delta_2^{l_1}(a_1),\cdots,Sq_2\,\delta_2^{l_i}(a_i)$ 是模 2 綫性相关的，假定 $\sum_{k=1}^{i}\epsilon_k\,\delta_{q_2}\,\delta_2^{l_k}(a_k)+Sq_2\,\delta_2^{q_{i+j+1}}(c_{i+j+1})=0$，其中 ϵ_k 等于 0 或 1，由于 $l_1-q_{i+j+1}\geqslant 0,\cdots,l_i-q_{i+j+1}\geqslant 0$. 我們設 $b_{j+1}==C_{i+j+1}+\sum_{k=1}^{i}\epsilon_k\,2^{l_k-q_{i+j+1}}a_k$，显然这样作出的 $a_1,\cdots,a_i,a_{i+1},b_1,\cdots,b_j$ 或 $a_1,\cdots,a_i,b_1,\cdots,b_{j+1}$ 也满足上面所叙述的条件，这样继續下去，我們就可以得出适合命题 24 的条件的一組基底.

（証毕）

适合命題 24 的条件的基底 $a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_t$ 称为 $C(H_{n+2}(X),2)\cap\mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的对于运算 Sq_2 的一組标准基底.

由于 $Sq_2\,\delta_2^{m_1}(b_1)=\cdots=Sq_2\,\delta_2^{m_t}(b_t)=0$，因而 $\delta_2^{m_1}(b_1)\in T_{m_1},\cdots,\delta_2^{m_t}(b_t)\in T_{m_t}$，对于 $\delta_2^{m_1}(b_1),\cdots,\delta_2^{m_t}(b_t)$ 分別可以施运算 $\varphi_{m_1},\cdots,\varphi_{m_t}$，設由 $H_n(X,Z_2)/Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))+Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 到 $H_n(X,Z_2)/Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))++Sq_1\,Sq_2(L_{i-1})+\varphi_i\,\mu_{2,0}(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 的射影对应为 τ_i. 則在 $H_n(X,Z_2)/Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))++Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 中一定有一組元素 $c_1,\cdots,c_t$ 使 $\tau_{m_1}(c_1)=\varphi_{m_1}(\delta_2^{m_1}(b_1)),\cdots,\tau_{m_t}(c_t)=\varphi_{m_t}(\delta_2^{m_t}(b_t))$，我們有下述命題.

命題 25. 設 $a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_t$ 为 $C(H_{n+2}(X))\cap Sq_2^{-1}(0)$ 的任何一組对于运算 Sq_2 的标准基底. $m_1,\cdots,m_t$ 分別为 $b_1,\cdots,b_t$ 的次数，$c_1,\cdots,c_t$ 的意义如上面所述，則可以选择 $C(H_{n+2}(X),2)\cap\mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的元素 $b_1',\cdots,b_t'$ 及 $C(\Pi_{n+2}(X),2)$ 中的元素 $\beta_1',\cdots,\beta_t'$ 使下列条件成立:

(a) $a_1,\cdots,a_s,b_1',\cdots,b_t'$ 仍旧为 $C(H_{n+2}(X),2)\cap Sq^{-1}(0)$ 的对于运算 Sq_2 的一組标准基底.

(b) 当 $1\leqslant i\leqslant t$ 时，b_i 和 b_i' 具有相同的次数 m_i.

(c) 当 $1\leqslant i\leqslant t$ 时，$\Phi_{n+2}(\beta_i')=b_i'$.

(d) 当 $1\leqslant i\leqslant t$ 时，$\Phi''_{n+2}(2^{m_i}\beta_i)=c_i$.

証. 由于 $\mathscr{S}q_2(b_1)=\cdots=\mathscr{S}q_2(b_t)=0$，由定理 2，在 $C(\Pi_{n+2}(X),2)$ 中一定有一組元素 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 使 $\Phi_{n+2}(\beta_1)=b_1,\cdots,\Phi''_{n+2}(\beta_t)=b_t$，則由定理 1，当 $1\leqslant i\leqslant t$ 时 $\Phi''_{n+2}(2^{m_i}\beta_i)=\varphi_{m_i}\,\delta_2^{m_i}(b_i)\mod Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))+Sq_1Sq_2(L_{m_i-1})+\varphi_i\,\mu_{2,0}\mathscr{S}q_2^{-1}(0)$，由于在 $H_n(X,Z_2)/Sq_2(H_2(X,Z_2))+Sq_1\,Sq_2(L_{m_i-1})+\varphi_{m_i}(\mu_{2,0}\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 中 $\tau_{m_i}(c_i)==\varphi_{m_i}\,\delta_2^{m_i}(b_i)$，因此在 L_{m_i-1} 中一定元素 t_i' 使

$$c_i-\Phi''_{n+2}(2^{m_i}\beta_i)=Sq_1\,Sq_2\,t_i' \mod$$

$$Sq_2(H_{n+2}(X,Z_2))+Sq_1\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))+\theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0)).$$

根据 L_{m_i-1} 的定义，在 $H_{n+3}(X,Z_{2^{m_i-1}})$ 中一定有一元素 t_i 使 $\mu_{2,2^{m_i-1}}(t_i)=t_i'$，而且 $Sq_2\,\Delta_{2^{m_i-1}}(t_i)=0$，我們設 $b_i'=b_i-\Delta_{2^{m_i-1}}(t_i)$. 由于 $\Delta_{2^{m_i-1}}(t_i)$ 的次数小于 2^{m_i}，因而 b_i' 的次数仍旧为 2^{m_i}，显然 $Sq_2(b_i')=\mathscr{S}q_2b_i-\mathscr{S}q_2\,\Delta_{2^{m_i-1}}(t_i)=0-0=0$，因而 $b_i'\in C(H_{n+2}(X),2)\cap\mathscr{S}q_2^{-1}(0)$，而且 (b) 成立. 由于 $\Delta_{2^{m_i-1}}(t_i)$ 的次数小于 b_i 的次数 2^{m_i}，因而 $a_1,\cdots,a_s,b_1',\cdots,b_t'$ 仍旧为 $C(H_{n+2}(X),2)\cap\mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的一組基底. 由

于当 $1 \leqslant i \leqslant t$ 时，$\delta_{2^{m_i}}(b'_i) = \delta_{2^{m_i}}(b_i) - \delta_{2^{m_i}} \Delta_{2^{m_i-1}}(t_i) = \delta_{2^{m_i}}(b_i)$，因而 $Sq_2 \delta_{2^{m_i}}(b'_i) = Sq_2 \delta_{2^{m_i}}(b_i) = 0$，所以 $a_1, \cdots, a_s, b'_1, \cdots, b'_t$ 仍旧是 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的一組对于运算 Sq_2 的标准基底．这样命題中的(a)也成立．

由于当 $1 \leqslant i \leqslant t$ 时 $Sq_2(b'_i) = 0$，因此在 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 中一定有一組元素 $\beta'_1, \cdots, \beta'_t$ 使 $\Phi_{n+2}(\beta'_1) = b'_1, \cdots, \Phi_{n+2}(\beta'_t) = b'_t$，则当 $1 \leqslant i \leqslant t$ 时，$\Phi_{n+2}(\beta_i - \beta'_i) = b_i - b'_i = = \Delta_{2^{m_i-1}}(t_i)$，因而 $\Phi'_{n+2}(2^{m_i-1}(\beta_i - \beta'_i)) = Sq_2 \delta_{2^{m_i-1}} \Phi_{n+2}(\beta_i - \beta'_i) = Sq_2 \delta_{2^{m_i-1}} \Delta_{2^{m_i-1}}(t_i) = Sq_2 \mu_{2, 2^{m_i-1}}(t_i) = \mathscr{S}q_2(t'_i) \mod \mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$．则 $\Phi''_{n+2}(2^{m_i}(\beta_i - \beta'_i)) = = \Phi''_{n+2}(2 \cdot 2^{m_i-1}(\beta_i - \beta'_i)) = Sq_1 \mathscr{S}q_2 t'_i \mod Sq_2(H_{n+2}(X, Z_2)) + Sq_2 \mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X)) + + \theta \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$，即 $\Phi''_{n+2}(2^{m_i}(\beta_i - \beta'_i)) = Sq_1 Sq_2 t'_i \mod Sq_2(H_{n+2}(X, Z_2)) + Sq_1 \mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X)) + \theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$，所以 $\Phi''_{n+2}(2^{m_i}\beta'_i) = \Phi''_{n+2}(2^{m_i}\beta_i) - Sq_1 \mathscr{S}q_2 t'_i = \Phi''_{n+2}(2^{m_i}\beta_i) + + Sq_1 \mathscr{S}q_2 t'_i = c_i \mod Sq_2(H_{n+2}(X, Z_2)) + Sq_1 \mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X)) + \theta \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$．所以命題中(c)和(d)都成立．

（証毕）

§16. $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 的代数作法

設 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t$ 为 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的对运算 Sq_2 的一組标准基底，$l_1, \cdots, l_s, m_1, \cdots, m_t$ 分别为 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t$ 的次数，設 $d_1 = Sq_2 \delta_{2^{l_1}}(a_1), \cdots, d_s = Sq_2 \delta_{2^{l_s}}(a_s)$，根据标准基底的意义，$d_1, \cdots, d_s$ 在 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X, Z_2))$ 中是模 2 綫性无关的，由于 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X, Z_2))$ 是一个向量空間（对域 Z_2 来說），因此可以找出一些元素 $d_{s+1}, \cdots, d_n$ 使 $d_1, \cdots, d_s, d_{s+1}, \cdots, d_n$ 为 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X, Z_2))$ 的一組基底，設 E 为羣 $H_n(X, Z_2)/Sq_2(H_{n+2}(X, Z_2)) + Sq_1 \mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X)) + + \theta(\mathscr{S}q_2^{-1}(0))$ 被羣 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$ 的这样一个扩充，它对于 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$ 的基底 $d_1, \cdots, d_s, d_{s+1}, \cdots, d_n$ 的关連元素为 $Sq_1(d_1), \cdots, Sq_1(d_n)$，設 λ 为这个扩充的內射对应，μ 为这个扩充的射影对应，設 $c_1, \cdots, c_t$ 的意义和 §15 一样，$u_1, \cdots, u_s$ 为 E 中任何一組适合条件 $\mu_1(u_1) = a_1, \cdots, \mu_s(u_s) = a_s$ 的元素，再設 F 为羣 E 被 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的这样一个扩充，它对于 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 中的基底 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t$ 的一組关連元素为 $u_1, u_2, \cdots, u_s, \lambda(c_1), \cdots, \lambda(c_t)$，显然 E 和 F 都可以利用同調羣及运算 $Sq_1, Sq_2, \varphi_1, \cdots, \varphi_r, \cdots, \varphi'_\infty$ 及求羣的直接和与求商羣等运算經过可以估計到的有限次步驟构造出来，我們有下述定理．

定理 7. $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 与 F 是同构的．

証． 由于 $\mathscr{S}q_2(a_1) = \cdots = \mathscr{S}q_2(a_s) = 0$．由定理 2 在 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 中一定有一組元素 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 存在使 $\Phi_{n+2}(\alpha_1) = a_1, \cdots, \Phi_{n+2}(\alpha_s) = a_s$，設 $\beta'_1, \cdots, \beta'_s, b'_1, \cdots, b'_t$ 为命題 25 所保証的 $C(H_{n+2}(X), 2)$ 及 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 中的元素組，由定理 2，显然 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 是羣 $C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 2)$ 被羣 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 的一个扩充，而 $2^{l_1}\alpha_1, \cdots, 2^{l_s}\alpha_s, 2^{m_1}\beta'_1, \cdots, 2^{m_t}\beta'_t$ 则是这个扩充对于 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}q_2^{-1}(0)$ 中的基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta'_1, \cdots, \beta'_t$ 的关連元素，設 Ψ 为由 $C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 2)$ 到 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 的內射对应，则 Φ_{n+2} 是这个扩充的射影对应．

由定理 3，$C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 0)$ 是羣 $C(\Phi'^{-1}_{n+2}(0), 2)$ 被羣 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}q_2(H_{n+3}(X))$ 的扩

充，在 $C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 2)$ 中一定有元素 $\gamma_{s+1}, \cdots, \gamma_h$ 使 $\Phi'_{n+2}(\gamma_{s+1}) = d_{s+1}, \cdots, \Phi'_{n+2}(\gamma_h) = d_h$，关于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的假定，$\Phi_{n+2}(\alpha_1) = a_1, \cdots, \Phi_{n+2}(\alpha_s) = a_s$，因而 $\Phi'_{n+2}(2^{l_1}\alpha_1) = \mathrm{Sq}_2 \delta_2 l_1 (a_1) = d_1, \cdots, \Phi'_{n+2}(2^{l_s} a_s) = \mathrm{Sq}_2 \delta_2 l_s (a_s) = d_s$，因而 $2^{l_1+1}\alpha_1, \cdots, 2^{l_s+1}\alpha_s, 2\gamma_{s+1}, \cdots, 2\gamma_h$ 是这个扩充的对于 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}\mathrm{q}_2(H_{n+3}(X))$ 的基底 $d_1, \cdots, d_h$ 的关連元素.

由命題 23 可知，一定有一个由 $C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 2)$ 到 E 的同构对应 Φ' 使下列图形是可交換的，而且 $\Phi'(2^{l_1}\alpha_1) = u_1, \cdots, \Phi'(2^{l_s}\alpha_s) = u_s$.

$$\begin{array}{ccccc}
C(\Phi'^{-1}_{n+2}(0), 2) & \xrightarrow{\nu} & C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 2) & \xrightarrow{\Phi'_{n+2}} & H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}\mathrm{q}_2(H_{n+3}(X)) \\
\downarrow \Phi''_{n+2} & & \downarrow \Phi' & & \downarrow I \\
H_n(X, Z_2)/(\quad) & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}\mathrm{q}_2(H_{n+3}(X))
\end{array}$$

这里 $H_n(X, Z_2)/(\quad)$ 表示羣 $H_n(X, Z_2)/\mathrm{Sq}_2(H_{n+2}(X, Z_2)) + \mathrm{Sq}_1 \mathscr{S}\mathrm{q}_2(H_{n+3}(X)) + \theta(\mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0))$，$\nu$ 则表示由 $C(\Phi'^{-1}_{n+2}(0), 2)$ 到 $C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 2)$ 的內射映象，I 则表示由 $H_{n+1}(X, Z_2)/\mathscr{S}\mathrm{q}_2(H_{n+3}(X))$ 到自身的恆等对应，由于 $\Phi'\nu = \lambda\Phi''_{n+2}$，我們立刻有 $\Phi'\nu'(2^{m_1}\beta_1) = \Phi'(2^{m_1}\beta_1) = \lambda\Phi''_{n+2}(2^{m_1}\beta_1) = \lambda(c_1), \cdots, \Phi'\nu'(2^{m_t}\beta_t) = \Phi'(2^{m_t}\beta_t) = \lambda\Phi''_{n+2}(2^{m_t}\beta_t) = \lambda(c_t)$.

設 J 为一个由下面方式規定的由 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)$ 到自身的对应，对于 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)$ 中的任意元素 $\sum_{k=1}^{s} \theta_k a_k + \sum_{k=1}^{t} \eta_k b'_k$，其中 θ_k, η_k 为一些整数，我們設

$$J\left(\sum_{k=1}^{s} \theta_k a_k + \sum_{k=1}^{t} \eta_k b'_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \theta_k a_k + \sum_{k=1}^{t} \eta_k b_k.$$

由于 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t$ 是 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)$ 的一組基底，显然 J 是一个同构对应，根据上面的說明 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 是 $C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 2)$ 被羣 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)$ 的这样一个扩充，它对 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)$ 的基底 $a_1, \cdots, a_s, b'_1, \cdots, b'_t$ 的关連元素为 $2^{l_1}\alpha_1, \cdots, 2^{l_s}\alpha_s, 2^{m_1}\beta'_1, \cdots, 2^{m_t}\beta'_t$，而 F 则是羣 E 被 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)$ 的这样一个扩充，它对于 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)$ 的基底 $J(a_1), \cdots, J(a_s), J(b'_1), \cdots, J(b'_t)$（即 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t$）的关連元素为 $\Phi'(2^{l_1}\alpha_1), \cdots, \Phi'(2^{l_s}\alpha_s), \Phi'(2^{m_1}\beta_1), \cdots, \Phi'(2^{m_t}\beta_t)$，（即 $u_1, \cdots, u_s, \lambda(c_1), \cdots, \lambda(c_t)$，由于 J 和 Φ' 都是同构对应，由命題 23，一定有一个同构对应 Φ 存在使下列图形是可交換的.

$$\begin{array}{ccccc}
C(\Phi_{n+2}^{-1}(0), 2) & \xrightarrow{\psi} & C(\Pi_{n+2}(X), 2) & \xrightarrow{\Phi_{n+2}} & C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0) \\
\downarrow \Phi' & & \downarrow \Phi & & \downarrow J \\
E & \xrightarrow{\lambda'} & F & \xrightarrow{\mu'} & C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)
\end{array}$$

这里 λ, μ' 分別表示 E 到 F 的內射对应，和 F 到 $C(H_{n+2}(X), 2) \cap \mathscr{S}\mathrm{q}_2^{-1}(0)$ 的射影对应，因而 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$ 和 F 是同构的.

（証毕）

这样我們就說明了，我們可以用代数的方法作出羣 $C(\Pi_{n+2}(X), 2)$.

利用把子空間 B 迭合为一点的办法(和 [3] 一样),我們可以說明,定理 1 对于单連通空間对 (Y, B) 的相对同倫羣 $\Pi_m(Y, B)$ 照旧成立. 如果 (Y, B) 为一个适合下列条件的連通空間对:

① $\Pi_1(Y) = 1$,

② $\Pi_1(B) = 1$,

③ $\Pi_2(Y, B) = 1$,

④ $H_i(Y, B, Z_2) = 0$　　当 $3 \leqslant i \leqslant n-1$.

⑤ $H_i(Y, Z_2) = 0$　　当 $i = 2, 3$ 时.

⑥ $H_n(Y, B) = 0$,　　$H_{n+1}(Y, B)$, $H_{n+2}(Y, B)$ 都具有有限多个母元素.

我們同样可以說明在定理 2—7 中如果把(X)换为 (Y, B), 所有結論照旧成立, 因而我們也可以用同調羣及同調运算确定 $C(\Pi_{n+2}(Y, B), 2)$ 的代数构造.

参　考　文　献

[1] 张素誠: 数学学报, **8** (1958), 102—131.
[2] 周学光: 数学学报, **7** (1957), 346—370.
[3] 周学光: 数学学报, **9** (1959).
[4] Adem, J. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 720—725.
[5] Barrat, M. G. and Paechter, G. F., *ibid.* **38** (1952), 119—121.
[6] Hilton, P. T., *Quart. J. Math.*, **7** (1950), 299—309; *ibid.*, **2** (1951), 228—240.
[7] Понтрягий, Л. С., *Доклады АН СССР*, **70** (1950), 957—959.
[8] Whitehead, G. W., *Ann. of Math.*, **50** (1950), 245—247.
[9] 周学光: 科学記录, **2** (1958), 358—363.

STEENRODS OPERATIONS AND HOMOTOPY GROUPS (II)

Chow Sho-kwan

(*Nankai University*)

Abstract

An English abstract of this paper was published in Science Record, **11** (1958), 358—363.

第9卷 第3期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 3
1959 年 9 月 ACTA MATHEMATICA SINICA Sept., 1959

华林問題中 $g(\varphi)$ 的估値*

陈 景 潤
(中国科学院数学研究所)

假定 k 是一个整数 $\geqslant 12$, $\varphi(x)=\varphi_k(x)=x(x+1)\cdots(x+k-1)$. 記号 $g(\varphi_k)$ 表示最小的整数 r 满足条件,使得每个整数 $N\geqslant 1$ 都能够表示成

$$N=\frac{\varphi(x_1)}{k!}+\frac{\varphi(x_2)}{k!}+\cdots+\frac{\varphi(x_r)}{k!}, \tag{1}$$

这里的 x_i 是一个非負整数. Нечаев[2] 曾証明有

$$k+\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]\leqslant g(\varphi_k)\leqslant 6k\ln k+9k\ln\ln k.$$

本文的目的是要改善这个不等式为

$$k\ln k-k\leqslant g(\varphi_k)\leqslant 5(k\ln k+12).$$

华罗庚教授告訴作者說:他同时也已經証明了 $g(\varphi_k)\geqslant k\ln k-k$. 作者对于华罗庚教授,越民义教授常給指导,王元先生常給帮助表示感謝.

§1

这里首先是来估計三角和所用的記号完全相同于堆壘素数論.

引理 1. 命 $f(x)$ 代表一个有整数系数的多项式

$$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0.$$

若 $(a_k,\cdots,a_1,P)=1$, 則

$$\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x)/P}\right|\leqslant kP^{\frac{1}{2}}.$$

引理 2. 相同于引理 1 的条件但 $P>k^{2+\frac{6}{k}}$, $k\geqslant 12$, 則

$$\left|\sum_{x=1}^{P^L}e^{2\pi i f(x)/P^L}\right|\leqslant P^{L\left(1-\frac{1}{k}\right)}.$$

証: 命 t 是能整除 $(ka_k,\cdots,2a_2,a_1)$ 的 P 的最高方次, 則显然可見 $t=0$. 又設 $u_1,\cdots,u_r$ 是相合式

$$f'(x)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, P), \quad 0\leqslant x<P$$

的相异的根. 其重数分別为 $m_1,\cdots,m_r$. 命 $m_1+\cdots+m_r=m$, 易見 $m\leqslant k-1$. 現在用数学归納法来証明引理.

* 1957 年 9 月 26 日收到.

1）假定 $L=1$. 这就是引理 1 的情况.

2）假定 $L\geqslant 2$. 写

$$S(P^L, f(x))=\sum_{v=1}^{P}\sum_{\substack{0\leqslant x<P^{L}-1\\ x\equiv v\ (\mathrm{mod}\ P)}} e_{P^L}(f(x))=\sum_{v=1}^{P}S_v.$$

如果 v 并非 u_i 之一，則命

$$x=y+P^{L-1}z,\quad 0\leqslant y<P^{L-1},\quad 0\leqslant z<P,$$

即得

$$S_v=\sum_{\substack{0\leqslant x<P^L\\ x\equiv v\ (\mathrm{mod} P)}} e_{P^L}(f(x))=\sum_{\substack{0\leqslant y<P^{L-1}\\ y\equiv v\ (\mathrm{mod}\ P)}}\sum_{0\leqslant z<P} e_{P^L}\left(f(y)+P^{L-1}zf'(y)\right)=$$

$$=\sum_{\substack{0\leqslant y<P^{L-1}\\ y\equiv v\ (\mathrm{mod} P)}} e_{P^L}(f(y))\sum_{z=0}^{P-1} e_P\left(zf'(y)\right)=0, \tag{2}$$

如果 $v=\mu_i$，則依堆壘素数論引理 1.5 来定义 σ_i，如此則得

$$S_{u_i}=\sum_{\substack{x=1\\ x\equiv u_i(\mathrm{mod}\ P)}}^{P^L} e_{P^L}(f(x))=\sum_{y=1}^{P^{L-1}} e_{P^L}(f(u_i+Py))=$$

$$=e_{P^L}(f(u_i))\sum_{y=1}^{P^{L-1}} e_{P^{L-\sigma_i}}\left(P^{-\sigma_i}\left(f(u_i+Py)-f(u_i)\right)\right).$$

命 $g_i(x)=P^{-\sigma_i}\left(f(u_i+Py)-f(u_i)\right)$. 假定 $L\geqslant\sigma_i$，由归納法可得

$$|S_{u_i}|=P^{\sigma_i-1}|S(P^{L-\sigma_i},g_i(x))|=P^{\sigma_i(1-a)}P^{a\sigma_i-1}|S(P^{L-\sigma_i},g_i(x))|=$$

$$=P^{\sigma_i(1-a)+(1-a)(L-\sigma_i)}P^{a\sigma_i-1}\leqslant P^{a\sigma_i-1}P^{L(1-a)}. \tag{3}$$

如果 $L\leqslant\sigma_i$，則得

$$|S_{u_i}|\leqslant P^{L-1}=P^{aL-1}P^{L(1-a)}\leqslant P^{a\sigma_i-1}P^{L(1-a)}. \tag{4}$$

总括 (2), (3), (4) 三式得出

$$|S(P^L,f(x))|\leqslant P^{L(1-a)}\left(\sum_{j=1}^{r}P^{a\sigma_j-1}\right). \tag{5}$$

如果 $P\geqslant 2^k$，則由 [2] 的引理 3.5 知本引理能够成立，故不妨假定 $P<2^k$. 由我們的假定 u_i 是 $f'(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ P)$ 的根，其重数为 m_i，故有 $f'(u_i)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ P),\cdots$, $f^{(m_i)}(u_i)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ P)$，但 $f^{(m_i+1)}(u_i)\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ P)$，則由堆壘素数論引理 1.5 知 $\sigma_i\leqslant m_i+1$. 代入(5)式可得

$$|S(P^L,f(x))|\leqslant P^{L(1-a)}\sum_{j=1}^{r}P^{(m_j+1)a-1}=P^{L(1-a)}P^{-1}\sum_{j=1}^{r}P^{(m_j+1)a}.$$

如果 $r=1$，則引理显見成立. 如 $r>1$，如所有的 $P^{(m_i+1)a}\leqslant 4$，則本引理显見成立，

如 $P^{(m_1+1)a}\leqslant 4,\cdots,P^{(m_i+1)a}\leqslant 4$, 但 $P^{(m_{i+1}+1)a}\geqslant 4,\cdots,P^{(m_r+1)a}\geqslant 4$, 則得

$$\begin{aligned}|S(P^L,f(x))| &\leqslant (4i+P^{(m_{i+1}+\cdots+m_r+1)a})P^{-1}P^{L(1-a)}\leqslant\\ &\leqslant P^{L(1-a)}(4i+P^{1-a})P^{-1}\leqslant(4k+P^{1-a})P^{-1}P^{L(1-a)}\leqslant\\ &\leqslant(1+a)P^{-a}P^{L(1-a)}\leqslant P^{L(1-a)}\end{aligned}$$

当 $P>k^{2+\frac{6}{k}}$(这是因为如果 $a\geqslant 4,b\geqslant 4$, 則 $a+b\leqslant\frac{1}{2}ab$, $\frac{1}{2}<P^{-\frac{1}{k}}$).

如果所有 $P^{(m_1+1)a}\geqslant 4,\cdots,P^{(m_r+1)a}\geqslant 4$, 則本引理亦显然能够成立

(因 $P^{(m_1+1)a}+P^{(m_2+1)a}+\cdots+P^{(m_r+1)a}\leqslant P^{(m_1+m_2+\cdots+m_r+1)a}\leqslant P^{k\cdot a}=P$).

故本引理成立.

§ 2

在这里我們为了估計 $g(\varphi_k)$, 使用这些記号: N是一个正整数, r 和 n 是整数,

$$r\geqslant 2k+1,\qquad n\geqslant 1,\qquad k\geqslant 12,\qquad M=k!N,$$

$$P=[M^a],\quad P_1=[0{,}25P],\quad P_2=[0{,}5P_1^{1-a}],\cdots,P_n=[0{,}5P_{n-1}^{1-a}].$$

假定

$$u=\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi_2)+\cdots+\varphi(\xi_n),$$

这里的 ξ_i 經过数值:

$$\xi_i=P_i,\ P_i+1,\ \cdots,\ 2P_i-1.$$

u 的数目記之为V,容易得到 $V=P_1P_2\cdots P_n$. 假定 u_1 所經过的范围相同于 u, 假定

$$M_0=M-u-u_1,\qquad N_0=\frac{M_0}{k!}.$$

記号 $I(N)$ 是表示将正整数 $M=k!N$ 表示成

$$M=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_r)+u+u_1 \tag{6}$$

的个数.

假定 $\tau=P^{\frac{k}{1+a}}$. 則有

$$I(N)=\int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}}L_\alpha^r U_\alpha^2 e^{-2\pi i\alpha M}\,d\alpha.$$

这里

$$L_\alpha=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\alpha\varphi(x)},$$

$$U_\alpha=\sum_{u}e^{2\pi i\alpha u};$$

区間 $(-\tau^{-1},1-\tau^{-1})$ 将乜分成基本区間和余区間. 基本区間乃是包含所有满足下面条件的点 α

$$\alpha=\frac{a}{9}+z,\qquad (a,q)=1,\qquad -\frac{1}{q\tau}\leqslant z\leqslant\frac{1}{q\tau},$$

$$0<q\leqslant P^{1-a},\qquad 0\leqslant a<q.$$

区間 $(-\tau^{-1}, 1-\tau^{-1})$ 中除去基本区間之后，所剩余的点的全体称之为余区間，則

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N).$$

假定 $(a,q) = 1,\ q > 0$,

$$S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}\varphi(x)},$$

这里的 a 經过一个关于模 q 的既約剩余系，令

$$A(q) = A(q,N,r) = q^{-r}\sum_{a} S_{a,q}^{r} e^{-2\pi i \frac{a}{q}M}.$$

又假定

$$\mathfrak{S}(N,r) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q,N,r), \qquad T_r = \frac{P(1+a)}{P(ra)}(k!)^{ra-1},$$

$$\psi(P) = \psi(P,N,r) = \sum_{s=0}^{\infty} A(P^s,N,r).$$

在 [1] 的第八章証明过这个結果.

假定存在正常数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 使得每个整数 $N \geqslant c$，具有下面的不等式：

$$0 < \frac{1}{\mathfrak{S}(N_0,r)} < \alpha_1, \qquad 0 < \frac{1}{T_r} < \alpha_2,$$

$$\left| I_1(N) - T_r \sum_{N_0} N_0^{ra-1}\mathfrak{S}(N_0, r) \right| < \alpha_3 N^{ra-1-0.5a^2(1-a)},$$

$$|I_2(N)| < \alpha_4 V^2 N^{ra-1-\delta},$$

这里 $0 < \delta \leqslant 0.5\,a^2(1-a)$,

$$\sum_{N_0} N_0^{ra-1} > \frac{1}{\alpha_5} V^2 N^{ra-1}, \qquad c \geqslant [\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5]^{1/\delta}. \tag{6'}$$

則当 $n \geqslant 12$ 时有

$$g(\varphi_n) \leqslant \max(k \ln\ln c + 3k + 2,\quad 2n + r), \tag{7}$$

取

$$r = 2k + 1, \qquad n = \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{18k^3\ln k}{r}\right] + 1.$$

則有：

$$2n + r \leqslant 4k\ln k + 2k\ln\ln k + 6.4k < 4k\ln k + 9k\ln\ln k.$$

現在来估計常数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 及 α_5.

引理 3. 有：$\ln\alpha_1 < 97k^{8+\frac{6}{k}}$.

証： 由 [1] 的引理 3.8 有：

$$\mathfrak{S}(N,r) = \prod_{P} \psi(P,N,r),$$

这里的 P 經过所有的素数. 所以

$$\frac{1}{\mathfrak{S}(N,r)} = \Pi' \frac{1}{\psi(P)} \Pi'' \frac{1}{\psi(P)},$$

乘积 Π' 經过所有素数不超过 $16k^{2+\frac{6}{k}}$, 而乘积 Π'' 經过所有的素数超过 $16k^{2+\frac{6}{k}}$. 由[1]的引理 3.9, 引理 8.1 及引理 8.4 得到

$$\psi(P,N,r) \geqslant P^{-(\theta+B)(r-1)},$$

$$\theta \leqslant \begin{cases} 0, & \text{当 } P > k. \\ \dfrac{k}{P-1}, & \text{当 } P \leqslant k. \end{cases} \qquad B \leqslant \begin{cases} 1 & \text{当 } P > 3. \\ 2 & \text{当 } P = 2. \end{cases}$$

即有:

$$\sum_{P \leqslant 16k^{2+\frac{6}{k}}} (\theta + B)(r-1)\ln P \leqslant 2k\left(\sum_{P \leqslant k} \frac{k}{P-1}\ln P + \sum_{P \leqslant 16k^{2+\frac{6}{k}}} \ln P + \ln 2\right) \leqslant$$

$$\leqslant 96\,k^{3+\frac{6}{k}}$$

当 $P \geqslant 16k^{2+\frac{6}{k}}$,

$$|\psi(P,N,r) - 1| \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} P^{s(1-ra)} = \frac{P^{-1-a}}{1-P^{-1-a}} < P^{-1-0.5a},$$

这是因为

$$\frac{1}{1-P^{-1-a}} < e^{-2P^{-1-a}} < P^{0.5a},$$

所以

$$\psi(P,N,r) \geqslant 1 - P^{-1-0.5a},$$

即

$$\Pi'' \frac{1}{\psi(P)} \leqslant \Pi'' \frac{1}{1-P^{-1-0.5a}} \leqslant \sum_{x \geqslant 16k^{2+\frac{6}{k}}} x^{-1-0.5a} < k^3.$$

$$\mathfrak{S}(N,r) \geqslant \frac{1}{e^{96k^{3+\frac{6}{k}}}} \cdot \frac{1}{e^{k^3}} > \frac{1}{e^{97k^{3+\frac{6}{k}}}}.$$

引理 4. 有: $\alpha_2 \leqslant 1$.

引理 5. 有:

$$|I_2(N)| < e^{3k^8} V^2 N^{ra-1-\delta_1},$$

这里

$$\delta_1 \geqslant \frac{r}{6k^3 \ln 12k^3}.$$

引理 6. 有: $\alpha_5 \leqslant 4$.

引理 4,5,6 的証明見[2].

引理 7. 假定 $N > k^{20k^4}$. 则

$$\left| I_1(N) - T_r \sum_{N_0} N_0^{r_a-1} \mathfrak{S}(N_0, r) \right| < \alpha_3 V^2 N^{ra-1-0.5a^2(1-a)},$$

这里 $\alpha_3 < e^{32k^{3+\frac{6}{k}}}$.

証： 由[1]的引理 3 有：$\alpha_3 \leqslant (8kc_2)^r$，这里 c_2 是 $|S_{a,q}| \leqslant c_2 q^{1-a}$. 从引理 2，及 [3] 的引理 1.3 及引理 1.6 易得 $c_2 < k^{3r\left(k^{2+\frac{6}{k}}\right)} < e^{8k^{2+\frac{6}{k}}}$.

故有 $\alpha_3 \leqslant (8ke^{8k^{2+\frac{6}{k}}})^{2k} \leqslant e^{32k^{3+\frac{6}{k}}}$.

由(6′)得到 $\ln c \leqslant \frac{1}{\delta} \ln[\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5] < \frac{2k^2}{1-a} \ln \alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5 <$

$$< \frac{2k^2}{1-a}(97k^{3+\frac{6}{k}} + 32k^{3+\frac{6}{k}} + 3k^3 + 4) < 200\,k^{5+\frac{6}{k}},$$

这是因为 $\delta_1 = \dfrac{r}{6k^3 \ln 12k^3} < 0.5a^2(1-a)$.

由 (7) 得到

$$g(\varphi_k) \leqslant \max(k \ln\ln c + 3k + 2,\ 2n + r),$$

$$2n + r \leqslant 4k \ln k + 9k \ln\ln k,$$

$$k \ln\ln c + 3k + 2 < k \ln 200k^{5+\frac{6}{k}} + 3k + 2 \leqslant k\left[\left(5 + \frac{6}{k}\right)\ln k + \ln 200\right] +$$

$$+ 3k + 2 < k(5\ln k + 12).$$

即为 $g(\varphi_k) \leqslant k(5\ln k + 12)$.

由 $\varphi(x) = x(x+1)\cdots(x+k-1)$. 所以 $\dfrac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = \dfrac{x+k}{x}$.

所以

$$k\varphi(1) + \left[\frac{k}{2}\right]\varphi(2) + \left[\frac{k}{3}\right]\varphi(3) + \cdots + \left[\frac{k}{k}\right]\varphi(k)$$

的表示法的个数即为最小的，故有

$$g(\varphi_k) \geqslant k \ln k - k.$$

参 考 文 献

[1] Нечаев, В. И., Проблема варинга для многочленов, *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стекалова АН СССР*, т. 38.

[2] Нечаев, В. И., О представлении натуральных чисел суммой слагаемых вида $\frac{x(x+1)\cdots(x+k-1)}{k!}$. *Изв. Акад. Наук. СССР*, Том 17, 1953.

[3] 华罗庚：堆壘素数論.

ON THE REPRESENTATION OF NATURAL NUMBER AS A SUM OF TERMS OF THE FORM $\frac{x(x+1)\cdots(x+k-1)}{k!}$

CHEN CHING-JUN

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Let $\varphi_k(x)$ denote the polynomial of the title, and let $g(\varphi_k)$ denote the Least r with the property that every positive integer is representable as a sum of at most r values of $\varphi_k(x)$, arising from non-negative integral value of x. Necăev, V. 1 proved that[2]

$$k+\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]\leqslant g(\varphi_k)\leqslant 6\,k\ln k+9k\ln\ln k$$

for $k\geqslant 12$. In the present paper we improves the right-hand side to $k(5\log k+12)$, and the left-hand side to $k\log k-k$.

第9卷 第3期　　数学学报　　Vol. 9, No. 3
1959年9月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Sept., 1959

С. Н. Мергелян 定理的推广

郭竹瑞
(浙江大学)

С. Н. Мергелян 在他的博士論文中[1]，給出复数域逼近論的一逆定理，即由 $f(z)$ 在区域 D 中的逼近度 $\rho_n(f, D)$ 給出 $f(z)$ 的連續性。本文把他的結果推广为 De la Vallée Poussin 在实变数逼近論中[2] 相应定理的形式。

兹先介紹本文中引用的符号:

区域 D 是具有連通补集的卡拉特阿多利域。L_R 是 D 的外平准綫，它是把 $\overline{D}$ 的补集保角映照于 $|w| > 1$ 的映照下，$|w| = R > 1$ 所对应的曲綫。Γ 是 D 的境界綫，$D(\xi; R)$ 是 Γ 上一点 ξ 到 L_R 的距离。对于 $\xi \in \Gamma$，B_ξ 是 D 的部分区域，它具有下面的性質: B_ξ 內的任意一点到 ξ 的距离与到 Γ 的距离的比恆小于某一常数 C_1. $\omega(\delta)$ 是 $f(z)$ 在 D 中的連續模，它表示

$$|f(z') - f(z'')|$$

对于所有 $\overline{D}$ 中的点 z', z'' 能够用全在 $\overline{D}$ 中长度不超过 δ 的有长曲綫連接的上确界。$\omega_r(\delta)$ 是 $f(z)$ 的 r 阶微商 $f^{(r)}(z)$ 在 D 中的連續模。

引理 1. 存在正整数叙列

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

俾

$$\frac{1}{4} D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_{k-1}}\right) < D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_k}\right) < \frac{1}{2} D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_{k-2}}\right). \tag{1}$$

証明: 对于每一整数 $k > 0$ 可决定正整数 n_k 俾

$$D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_k}\right) \geqslant \frac{1}{2^k} > D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_k + 1}\right).$$

由是

$$D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_k}\right) \leqslant D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_{k-1} + 1}\right) < \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_{k-1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_{k-2} + 1}\right) < \frac{1}{2^{k-2}} \leqslant D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_{k-2}}\right),$$

从而推得

$$D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_k}\right) < \frac{1}{2} D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_{k-2}}\right).$$

又可証

$$D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_k}\right) > \frac{1}{4} D\left(\xi; 1 + \frac{1}{n_{k-1}}\right),$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4} D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_{k-1}}\right) < D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_k}\right) < \frac{1}{2} D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_{k-2}}\right).$$

引理1証毕.

引理 2. 設 n 次多項式 $P_n(z)$ 滿足

$$\max_{z\in\overline{D}} |P_n(z)| = M,$$

那末

$$\max_{z\in B_\xi} |P_n^{(r)}(z)| \leqslant \frac{LMr!}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{n}\right)\right]^r},$$

其中 L 是和 n 与 r 无关的常数.

証明見 Мергелян 論文 [1] 第一章引理 4.

定理 1. 設 $\Omega(x)$ 是实变数 x 单調不增的函数,又

$$\lim_{x\to\infty} \Omega(x) = 0, \tag{2}$$

$f(z)$ 是定义于 $\overline{D}$ 中的函数,若

$$\rho_n(f, D) < \left\{D\left(\xi; 1+\frac{1}{n}\right)\right\}^r \Omega(n), \tag{3}$$

其中 $r \geqslant 0$ 是整数,如果

$$\int^{\infty} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) < \infty, \tag{4}$$

那末,$f(z)$ 在 $\overline{B}_\xi$ 中具有 r 級連續微商,且 $f^{(r)}(z)$ 的連續模 $\omega_r(\delta)$ 滿足

$$\omega_r(\delta) \leqslant C\left[-\delta \int_{n_1}^{D^{-1}\left(\frac{\delta}{4}\right)} \frac{\Omega(x)}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)\right]^2} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) - \right.$$
$$\left. -\int_{D^{-1}(\delta)}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)\right],$$

其中 C, n_1 是常数. $D^{-1}(\delta)$ 是 $D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)$ 的反函数,它表示使

$$D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) = \delta$$

的数值 x.

如果对于任意的正整数 N 都有 $\Omega_N(x)$ 滿足 (2) (4) 俾

$$\rho_n(f, D) < \left\{D\left(\xi; 1+\frac{1}{n}\right)\right\}^N \Omega_N(n)$$

成立,則 $f(z)$ 在 $\overline{B}_\xi$ 中有无限級微商存在.

証明. 設 $P_n(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 中的 n 次最佳逼近多項式,显見

$$f(z) = P_{n_1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [P_{n_{k+1}}(z) - P_{n_k}(z)].$$

記

$$R_{n_k}(z) = P_{n_k}(z) - P_{n_{k-1}}(z),$$

則有

$$\max_{z\in\bar{D}}|R_{n_k}(z)| \leqslant \max_{z\in\bar{D}}|P_{n_k}(z) - f(z)| + \max_{z\in\bar{D}}|P_{n_{k-1}}(z) - f(z)| \leqslant 2\rho_{n_{k-1}}(f, D).$$

由引理 1, 2 及定理 1 的假設得到:

$$\max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_k}^{(r)}(z)| + \max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_{k+1}}^{(r)}(z)| \leqslant \frac{2Lr!\rho_{n_{k-1}}(f, D)}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_k}\right)\right]^r} +$$

$$+ \frac{2Lr!\rho_{n_k}(f, D)}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)\right]^r} \leqslant \frac{2^{2r+1}Lr!\,\rho_{n_{k-1}}(f, D)}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_{k-1}}\right)\right]^r} + \frac{2^{2r+1}Lr!\,\rho_{n_k}(f, D)}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_k}\right)\right]^r} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2r+1}Lr!\,\Omega(n_{k-1}) + 2^{2r+1}Lr!\,\Omega(n_k) \leqslant C'\Omega(n_{k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant -2C'\frac{\Omega(n_{k-1})}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_{k-3}}\right)}\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_{k-1}}\right) - D\left(\xi; 1+\frac{1}{n_{k-3}}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant -C''\int_{n_{k-3}}^{n_{k-1}} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)}\,dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right), \tag{5}$$

这里 $C'' > 0$ 是和 n_k 及 x 无关的常数.

$$\sum_{K=k}^{\infty}\max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_K}^{(r)}(z)| = \left(\max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_k}^{(r)}(z)| + \max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_{k+1}}^{(r)}(z)|\right) +$$

$$+ \left(\max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_{k+2}}^{(r)}(z)| + \max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_{k+3}}^{(r)}(z)|\right) + \cdots \leqslant$$

$$\leqslant -C''\left[\int_{n_{k-3}}^{n_{k-1}} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)}\,dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{n_{k-1}}^{n_{k+1}} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)}\,dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) + \cdots\right] =$$

$$= -C''\int_{n_{k-3}}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)}\,dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right).$$

由定理 1 的假設(4)知上面不等式中最后一积分是收斂的.

多項式級数

$$P_{n_1}^{(r)}(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[P_{n_{k+1}}^{(r)}(z) - P_{n_k}^{(r)}(z)\right]$$

在 D 中就是 $f^{(r)}(z)$, 由上面的証明知道它在 $\bar{B}_\xi$ 中是絕对且一致收斂的, 从而 $f^{(r)}(z)$ 在 $\bar{B}_\xi$ 中是連續的.

現在来估計 $f^{(r)}(z)$ 在 $\bar{B}_\xi$ 中的連續模: 設 z', z'' 是 $\bar{B}_\xi$ 中任意两点, 显見

$$|f^{(r)}(z')-f^{(r)}(z'')|\leqslant|P_{n_1}^{(r)}(z')-P_{n_1}^{(r)}(z'')|+\sum_{k=2}^{3}|P_{n_k}^{(r)}(z')-P_{n_{k-1}}^{(r)}(z')-$$

$$-P_{n_k}^{(r)}(z'')+P_{n_{k-1}}(z'')|+\sum_{k=4}^{m}|P_{n_k}^{(r)}(z')-P_{n_{k-1}}^{(r)}(z')-P_{n_k}^{(r)}(z'')+$$

$$+P_{n_{k-1}}(z'')|+\sum_{k=m+1}^{\infty}|P_{n_k}^{(r)}(z')-P_{n_{k-1}}^{(r)}(z')-P_{n_k}(z'')+P_{n_{k-1}}(z'')|, \qquad (6)$$

这里的 m 留待下面决定.

(6) 式右边第三项和数中相邻两項的和不超过:

$$\max_{z\in\bar{B}_\xi}|P_{n_k}^{(r+1)}(z)-P_{n_{k-1}}^{(r+1)}(z)|\int_{z'}^{z''}dS+\max_{z\in\bar{B}_\xi}|P_{n_{k+1}}^{(r+1)}(z)-$$

$$-P_{n_k}^{(r+1)}(z)|\int_{z'}^{z''}dS=\left[\max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_k}^{(r+1)}(z)|+\max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_{k+1}}^{(r+1)}(z)|\right]\int_{z'}^{z''}dS, \qquad (7)$$

这里积分路綫位于 $\bar{B}_\xi$ 之中.

仿(5)式并利用引理 1 可以估計(7)式右边第一因子:

$$\max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_k}^{(r+1)}(z)|+\max_{z\in\bar{B}_\xi}|R_{n_{k+1}}^{(r+1)}(z)|\leqslant\frac{C'''\Omega(n_{k-1})}{D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-1}}\right)}+\frac{C'''\Omega(n_k)}{D\left(\xi;1+\frac{1}{n_k}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{5C'''\Omega(n_{k-1})}{D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-1}}\right)}<\frac{80C'''\Omega(n_{k-1})}{D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-3}}\right)}<\frac{-160C'''\Omega(n_{k-1})}{\left[D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-3}}\right)\right]^2}\left[D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-1}}\right)-\right.$$

$$\left.-D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-3}}\right)\right]\leqslant-160C'''\int_{n_{k-3}}^{n_{k-1}}\frac{\Omega(x)}{\left[D\left(\xi;1+\frac{1}{x}\right)\right]^2}dD\left(\xi;1+\frac{1}{x}\right).$$

取 $\int_{z'}^{z''}dS\leqslant\delta$, 即积分路径为一有长曲綫,其长不超过 δ, 由是(7)式不超过

$$-C_3\delta\int_{n_{k-3}}^{n_{k-1}}\frac{\Omega(x)}{\left[D\left(\xi;1+\frac{1}{x}\right)\right]^2}dD\left(\xi;1+\frac{1}{x}\right), \qquad (8)$$

这里 $C_3>0$ 为一与 n_k 无关的常数.

現在模仿(5)式来估計(6)式右边最后一項和数中相邻两項之和:

$$|R_{n_k}^{(r)}(z')-R_{n_k}^{(r)}(z'')|+|R_{n_{k+1}}^{(r)}(z')-R_{n_{k+1}}^{(r)}(z'')|\leqslant 2C_2\Omega(n_{k-1})+$$

$$+2C_2\Omega(n_k)\leqslant 4C_2\Omega(n_{k-1})<-8C_2\frac{\Omega(n_{k-1})}{D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-3}}\right)}\left[D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-1}}\right)-\right.$$

$$\left.-D\left(\xi;1+\frac{1}{n_{k-3}}\right)\right]\leqslant-8C_2\int_{n_{k-3}}^{n_{k-1}}\frac{\Omega(x)}{D\left(\xi;1+\frac{1}{x}\right)}dD\left(\xi;1+\frac{1}{x}\right).$$

由是

$$|R_{n_k}^{(r)}(z') - R_{n_k}^{(r)}(z'')| + |R_{n_{k+1}}^{(r)}(z') - R_{n_{k+1}}(z'')| <$$
$$< - C_4 \int_{n_{k-3}}^{n_{k-1}} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right), \tag{9}$$

这里 $C_4 > 0$ 为一常数.

基于(7)(8)(9)可得 $f^{(r)}(z)$ 連續模的估計:

$$|f^{(r)}(z') - f^{(r)}(z'')| \leqslant |P_{n_1}^{(r)}(z') - P_{n_1}^{(r)}(z'')| + \delta \sum_{k=1}^{3} \max_{z \in \bar{B}_\xi} |R_{n_k}^{(r+1)}(z)| -$$
$$- C_3\delta \sum_{k=1}^{m-3} \int_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{\Omega(x)}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)\right]^2} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) -$$
$$- C_4 \sum_{k=m-2}^{\infty} \int_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) \leqslant C_5\delta + C_6\delta -$$
$$- C_3\delta \int_{n_1}^{n_{m-2}} \frac{\Omega(x)}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)\right]^2} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) -$$
$$- C_4 \int_{n_{m-2}}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right).$$

取 m 使

$$n_{m-2} > D^{-1}(\delta) \geqslant n_{m-2} - 1.$$

又只要 $f^{(r)}(z) \neq$ 常数,必有 $C_7 > 0$ 存在使得它的連續模 $\omega_r(\delta)$ 滿足

$$\omega_r(\delta) > C_7\delta^{(*)}$$

由是得

$$\omega_r(\delta) \leqslant C\left[-\delta \int_{n_1}^{D^{-1}\left(\frac{\delta}{4}\right)} \frac{\Omega(x)}{\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)\right]^2} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right) -\right.$$
$$\left. - \int_{D^{-1}(\delta)}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)} dD\left(\xi; 1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

定理的第一部分証毕. 至于 $f(z)$ 具有无限級微商的情况, 由上面的証明显然可見.

推論 1. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{\rho_n(f, D)}}{\ln \frac{1}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{n}\right)}} = A$$

(*) 可以仿 [1] p. 17 的証明.

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 記 $[A-\varepsilon]=r$, 則在 $\bar{B}_\xi$ 中 $f^{(r)}(z)\in \mathrm{Lip}(B_\xi;\ A-\varepsilon-r)$. 若 $A=\infty$, 則 $f(z)$ 在 $\bar{B}_\xi$ 中具有无限級微商.

推論 2. 如果

$$\rho_n(f, D) \sim \frac{M\left[D\left(\xi; 1+\frac{1}{n}\right)\right]^r}{\left[\ln \frac{1}{D\left(\xi; 1+\frac{1}{n}\right)}\right]^{1+\alpha}},$$

其中 $r \geqslant 0$ 是整数, $\alpha > 0$, 則在 $\bar{B}_\xi$ 中 $f^{(r)}(z)$ 的連續模滿足:

$$\omega_r(\delta) < \frac{C_8}{\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}}.$$

附記 1. 推論 1 就是 Мергелян 定理 3.1[1].

附記 2. 在推論 2 的条件下如果应用 Мергелян 定理, 只能得到在 $\bar{B}_\xi$ 中

$$f^{(r-1)}(z)\in \mathrm{Lip}(B_\xi;\ 1-\varepsilon),$$

得不到推論 2 的結果.

定理 1 只在 $\bar{B}_\xi$ 中成立, 而对于具有連通补集的卡拉特阿多利域的境界綫 Γ 上任一点 ξ, 不見得存在区域 B_ξ (Мергелян[1] 指出: 存在 B_ξ 的点 ξ 处处稠密于 Γ 上). 因此定理 1 只是由 $f(z)$ 的逼近度得出 $f(z)$ 的局部性質, 下面将証明由 $f(z)$ 的逼近度得出它在 $\bar{D}$ 中的連續性, 为此, 先証明下面引理:

引理 3. 設 n 次多項式 $P_n(z)$ 滿足

$$\max_{z\in \bar{D}} |P_n(z)| = M,$$

那末

$$\max_{z\in \bar{D}} |P_n^{(r)}(z)| \leqslant \frac{Mer!}{\left[D\left(\Gamma; 1+\frac{1}{n}\right)\right]^r},$$

其中 $D\left(\Gamma; 1+\frac{1}{n}\right) = \inf\limits_{\xi\in\Gamma} D\left(\xi; 1+\frac{1}{n}\right)$, Γ 是 D 的境界綫.

証明. 設 z 是 Γ 上的任意一点, 則由 Cauchy 积分公式

$$P_n^{(r)}(z) = \frac{r!}{2\pi i}\int_{|t-z|=D\left(\Gamma; 1+\frac{1}{n}\right)} \frac{P_n(t)}{(t-z)^{r+1}}\, dt$$

基于 Мергелян 論文 [1] 第一章引理 3 知

$$\max_{t\in L_{1+\frac{1}{n}}} |P_n(t)| \leqslant M\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

由是

$$|P_n^{(r)}(z)| \leqslant \frac{r!M\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left[D\left(\Gamma, 1+\frac{1}{n}\right)\right]^r} < \frac{r!Me}{\left[D\left(\Gamma; 1+\frac{1}{n}\right)\right]^r},$$

由最大模原理推知:

$$\max_{z\in\overline{D}}|P_n^{(r)}(z)|\leqslant\frac{Mer!}{\left[D\left(\Gamma;1+\frac{1}{n}\right)\right]^r}.$$

引理証毕.

定理 2. 設 $\Omega(x)$ 是实变数 x 单調不增的函数,且满足

$$\lim_{x\to\infty}\Omega(x)=0. \tag{2}$$

$f(z)$ 是定义于 $\overline{D}$ 中的函数,若

$$\rho_n(f,D)<\left\{D\left(\Gamma;1+\frac{1}{n}\right)\right\}^r\Omega(n), \tag{3'}$$

其中 $r\geqslant 0$ 是整数. 如果

$$\int^{\infty}\frac{\Omega(x)}{D\left(\Gamma;1+\frac{1}{x}\right)}dD\left(\Gamma;1+\frac{1}{x}\right)<\infty, \tag{4'}$$

那末, $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 中具有 r 級連續微商,且 $f^{(r)}(z)$ 的連續模 $\omega_r(\delta)$ 满足

$$\omega_r(\delta)\leqslant C\left[-\delta\int_{n_1}^{D^{-1}\left(\frac{\delta}{4}\right)}\frac{\Omega(x)}{\left[D\left(\Gamma;1+\frac{1}{x}\right)\right]^2}dD\left(\Gamma;1+\frac{1}{x}\right)-\right.$$

$$\left.-\int_{D^{-1}(\delta)}^{\infty}\frac{\Omega(x)}{D\left(\Gamma;1+\frac{1}{x}\right)}dD\left(\Gamma;1+\frac{1}{x}\right)\right], \tag{10}$$

其中 C, n_1 是常数, $D^{-1}(\delta)$ 是 $D\left(\Gamma;1+\frac{1}{x}\right)$ 的反函数.

如果对于任意的正整数 N 都有 $\Omega_N(x)$ 满足 (2)(4′) 俾

$$\rho_n(f,D)<\left\{D\left(\Gamma;1+\frac{1}{n}\right)\right\}^N\Omega_N(n)$$

成立,则 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 中有无限級微商存在.

定理 2 的証明, 完全和定理 1 一样, 只要在定理 1 的証明中把 $D\left(\xi;1+\frac{1}{x}\right)$ 改为 $D\left(\Gamma;1+\frac{1}{x}\right)$, $\overline{B}_\xi$ 改为 $\overline{D}$, 而在应用引理 2 的地方, 改用引理 3 便可.

推論 1. 当区域 D 的境界綫 Γ 是解析的約当曲綫时,若

$$\rho_n(f,D)<\frac{M}{n^{r+\alpha}},$$

这里 $r\geqslant 0$ 是整数, $M>0$, $0<\alpha\leqslant 1$ 是常数,当 $0<\alpha<1$ 时

$$f^{(r)}(z)\in\mathrm{Lip}(\overline{D},\alpha);$$

当 $\alpha=1$ 时, $f^{(r)}(z)$ 的連續模 $\omega_r(\delta)$ 满足

$$\omega_r(\delta)\leqslant K\delta\ln\frac{1}{\delta},$$

这里 K 是正常数.

事实上;此时

$$\frac{A}{n} < D\left(\Gamma; 1+\frac{1}{n}\right) < \frac{B}{n},^{(*)}$$

这里A和B是与n无关的常数,由是

$$\rho_n(f, D) < M_1\left[D\left(\Gamma; 1+\frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha},$$

这里M_1是常数,由定理2即可推得結論.

推論 2. 当区域D的境界綫Γ是解析的約当曲綫时,若

$$\rho_n(f, D) < \frac{M}{n^r[\ln n]^{1+\alpha}},$$

这里$r \geqslant 0$是整数,$\alpha > 0$是常数,则$\omega_r(\delta)$满足

$$\omega_r(\delta) < \frac{h}{\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}},$$

其中$h > 0$是常数.

若区域D是約当区域,它的境界綫由有限条解析的約当弧組成,如果这些弧在交点处所张外角的最大者为$\lambda\pi$,定义t如下

$$t = \lambda \qquad 当 \lambda > 1 时;$$

$$t = 1 \qquad 当 \lambda \leqslant 1 时.$$

我們称这样的約当曲綫为t型曲綫.

A是已給正数,当$\frac{A}{t} \neq$正整数时,記$\left[\frac{A}{t}\right] = r$为不超过$\frac{A}{t}$的最大整数.

推論 3. 設D是t型曲綫Γ所界的約当区域,M是正常数,如果

$$\rho_n(f, D) < \frac{M}{n^A},$$

则当$\frac{A}{t} \neq$正整数时,

$$f^{(r)}(z) \in \mathrm{Lip}\left(\overline{D}, \frac{A}{t} - r\right);$$

若$\frac{A}{t}$为正整数r时,则$f^{(r-1)}(z)$連續,且于$\overline{D}$中成立:

$$\omega_{r-1}(\delta) \leqslant K\delta \ln\frac{1}{\delta}.$$

事实上,当Γ为t型曲綫时

$$D\left(\Gamma; 1+\frac{1}{n}\right) \geqslant K(\Gamma)\frac{1}{n^t}{}^{(**)}$$

这里$K(\Gamma)$是仅与Γ有关的常数. 由此容易推得結論.

推論 4. 設D是t型曲綫Γ所界的約当区域,如果

(*) 例如見 [3] p. 87.

(**) 例如見 [4] p. 34—35.

$$\rho_n(f, D) < \frac{M}{n^A[\ln n]^{1+\alpha}},$$

其中 $\frac{A}{t} = r \geqslant 0$ 是整数, $\alpha > 0$, 那末在 $\overline{D}$ 中成立:

$$\omega_r(\delta) \leqslant \frac{h}{\left[\ln \frac{1}{\delta}\right]^\alpha},$$

这里 h 是正常数.

推論 5. 設 D 是任意的有限区域, 如果

$$\rho_n(f, D) < \frac{M}{n^A},$$

当 $\frac{A}{2} \neq$ 正整数时, 記 $\left[\frac{A}{2}\right] = r$, 則

$$f^{(r)}(z) \in \mathrm{Lip}\left(\overline{D}, \frac{A}{2} - r\right),$$

当 $\frac{A}{2} = r$ 为正整数时, 則 $f^{(r-1)}(z)$ 在 $\overline{D}$ 中連續, 且

$$\omega_{r-1}(\delta) < K\delta \ln \frac{1}{\delta}$$

在 $\overline{D}$ 中成立, $K > 0$ 是常数.

事实上, 此时

$$D\left(\Gamma; 1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{\lambda_1}{n^2}.^{(*)}$$

由此容易推得結論.

推論 6. 設 D 是任意的有限区域, 如果

$$\rho_n(f, D) < \frac{M}{n^A(\ln n)^{1+\alpha}},$$

这里 $\frac{A}{2} = r \geqslant 0$ 是整数, $\alpha > 0$, 則

$$\omega_r(\delta) < \frac{h}{\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^\alpha},$$

这里 h 是正常数.

附記: 推論 1, 3 已見于[4], 推論 5 比 Мергелян 論文 [1] 第三章定理 3.2 的結果稍許好一些.

参　考　文　献

[1] Мергелян, С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций. *Труды матем. института им. В. А. Стеклова, АН СССР*, 37 (1951).

(*) 例如見 [1] p. 27.

[2] De la Vallée Poussin: *Leçons sur làpproximation des fonctions d'une variable réelle.* (1919).
[3] Sewell, W. E., Generalized derivatives and approximation by polynomials. *Trans. Amer. math. Soc.*, 41 (1937), 84—123.
[4] Sewell, W. E., *Degree of approximation by polynomials in the complex domain.* Princeton University press. 1942.

THE IMPROVEMENT OF S. N. MERGELYAN'S THEOREMS

Guo Zhu-rui

(*Chekiang University*)

Abstract

This paper extends S. N. Mergelyan's converse theorems of Tchebycheff approximation in the complex domain to that of the corresponding theorem of one real variable given by De la Vallée Poussin, and gives some corollaries.

第9卷 第3期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 3
1959 年 9 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Sept., 1959

关于亚純函数理論中与极点无涉的基本不等式*

謝 庭 春

(福建师范学院)

关于奈望利納 (Nevanlinna) 氏第二基本不等式曾有引入紀(导)数而作之种种不同的推广,在这些推广式中,极点的密指量每見出現且有特殊作用,因之能否将此量消去是一問題. 米約 (Milloux) 氏及熊庆来教授由不同途径各获得与极点无涉之一不等式[1,2], 此二結果形状互异而各有特点. 熊庆来教授指出这两个結果尙可推广到更普遍的境地,我們由此方向探研得如下两个定理,为熊、米二氏者之推广.

1. 設 $f(x)$ 及 $\varphi_1(x)$ 为于全平面(开的)[1]內亚(半)純的函数,使

$$T(r, \varphi_1^{(k)}) = o[T(r, f^{(k)})] \tag{1}$$

于 $r \to \infty$. 由恆等式

$$f - \varphi_1 = (f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}) \frac{f - \varphi_1}{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}},$$

导出

$$m(r, f - \varphi_1) < m(r, f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}) + m\left(r, \frac{f - \varphi_1}{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}\right).$$

若設 $f(0) \neq \varphi_1(0), f(0), \varphi_1(0) \neq \infty$ 及 $f^{(k)}(0) \neq \varphi_1^{(k)}(0)$ 而应用 Jensen-Nevanlinna 公式于上述不等式右端之末一項,有

$$m(r, f - \varphi_1) < m(r, f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}) + m\left(r, \frac{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}{f - \varphi_1}\right) +$$
$$+ \left[N\left(r, \frac{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}{f - \varphi_1}\right) - N\left(r, \frac{f - \varphi_1}{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}\right) + \log\left|\frac{f(0) - \varphi_1(0)}{f^{(k)}(0) - \varphi_1^{(k)}(0)}\right|\right]. \tag{2}$$

从表达式[3]

$$V(r, f) = N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

熟知的性质,不等式(2)中方括号內之量可写为

$$N(r, f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}\right) + N\left(r, \frac{1}{f - \varphi_1}\right) - N(r, f - \varphi_1),$$

据此,式(2)化为

$$T(r, f - \varphi_1) < T(r, f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{f - \varphi_1}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}\right) +$$
$$+ m\left(r, \frac{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}{f - \varphi_1}\right) + \log\left|\frac{f(0) - \varphi_1(0)}{f^{(k)}(0) - \varphi_1^{(k)}(0)}\right|. \tag{3}$$

* 1958 年 2 月 21 日收到.

1) 为簡单起見,我們假定函数在全平面內为亚純的,对于在单位圓內的亚純函数亦可获得类似的結果.

再則我們有

$$T(r,f)=T(r,(f-\varphi_1)+\varphi_1)<T(r,f-\varphi_1)+T(r,\varphi_1)+\log 2. \tag{4}$$

联結 (2), (3), (4) 諸式后經簡单的推演可得

$$T(r,f)<T(r,f^{(k)})+N\left(r,\frac{1}{f-\varphi_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_1^{(k)}}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}-\varphi_1^{(k)}}{f-\varphi_1}\right)$$

$$+T(r,\varphi_1)+T(r,\varphi_1^{(k)})+\log\left|\frac{f(0)-\varphi_1(0)}{f^{(k)}(0)-\varphi_1^{(k)}(0)}\right|+\log 4. \tag{5}$$

繼取亚純函数 φ_2, φ_3, 使于 $r\to\infty$ 时

$$T(r,\varphi_2)=o[T(r,f^{(k)})] \quad 及 \quad T(r,\varphi_3)=o[T(r,f^{(k)})] \tag{6}$$

而 $\varphi_1^{(k)}, \varphi_2, \varphi_3$ 彼此之間是判別的.

我們置

$$F=\frac{f^{(k)}-\varphi_1^{(k)}}{f^{(k)}-\varphi_2}\cdot\frac{\varphi_3-\varphi_2}{\varphi_3-\varphi^{(k)}}, \tag{7}$$

并应用奈氏第二基本定理于 F 而命 $z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=\infty$. 若設 $F(0)\neq 0,\ \infty$; $F'(0)\neq 0$, 則有

$$T(r,F)<N(r,F)+N\left(\lambda,\frac{1}{F}\right)+N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-N_1(r)+S(r). \tag{8}$$

今函数 F 的零点含于函数 $\dfrac{1}{f^{(k)}-\varphi_1^{(k)}}$, φ_1, φ_2 及 $\dfrac{\varphi_3-\varphi_1^{(k)}}{\varphi_3-\varphi_2}$ 的极点內, 因此

$$N\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_1^{(k)}}\right)+N(r,\varphi_1^{(k)})+N(r,\varphi_2)+N\left(r,\frac{\varphi_3-\varphi_1^{(k)}}{\varphi_3-\varphi_2}\right). \tag{9}$$

由同样的方法可得

$$N(r,F)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_2}\right)+N(r,\varphi_1^{(k)})+N(r,\varphi_2)+N\left(r,\frac{\varphi_3-\varphi_2}{\varphi_3-\varphi_1^{(k)}}\right) \tag{9$'$}$$

及

$$N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_3}\right)+N(r,\varphi_2)+N(r,\varphi_3)+N\left(r,\frac{\varphi_1^{(k)}-\varphi_3}{\varphi_1^{(k)}-\varphi_2}\right). \tag{9$''$}$$

另一方面, 自式(7)解出

$$f^{(k)}=\frac{\varphi_1^{(k)}-\varphi_2}{1-\dfrac{\varphi_3-\varphi_1^{(k)}}{\varphi_3-\varphi_2}F}+\varphi_2.$$

設 $f^{(k)}(0)\neq\varphi_2(0)$, 而应用 Jensen-Nevanlinna 公式及据此恆等式有

$$T(r,f^{(k)})<T(r,F)+2T(r,\varphi_1^{(k)})+3T(r,\varphi_2)+2T(r,\varphi_3)$$

$$+\log\left|\frac{f^{(k)}(0)-\varphi_2(0)}{\varphi_1^{(k)}(0)-\varphi_2(0)}\right|+\log\frac{1}{|\varphi_2(0)-\varphi_3(0)|}+5\log 2. \tag{10}$$

联結 (8)—(10) 諸式并經过一番計算即得

$$T(r,f^{(k)})<N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_1^{(k)}}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_2}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_3}\right)+S^*(r), \tag{11}$$

其

$$S^*(r) = 141 + \log\frac{1}{|\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|} + 2\log\frac{1}{|\varphi_2(0) - \varphi_3(0)|}$$

$$+ \log\frac{1}{|\varphi_3(0) - \varphi_1^{(k)}(0)|} + \log\left|\frac{f^{(k)}(0) - \varphi_2(0)}{\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_2(0)}\right|$$

$$+ 3\overset{+}{\log}|F(0)| + \log\frac{1}{|F'(0)|} + 4\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + 5\log\frac{\rho}{r}$$

$$+ 6\log\frac{\rho}{\rho - r} + o[T(r, f)] + 8\overset{+}{\log} T(r, F).$$

于是自不等式(5)及(11)，我們得到

$$[1-o(1)]T(r,f)<N\left(r,\frac{1}{f-\varphi_1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_2}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_3}\right)+Q(r), \quad (12)$$

此地

$$Q(r) = \log\left|\frac{f(0) - \varphi_1(0)}{f^{(k)}(0) - \varphi_1^{(k)}(0)}\right| + m\left(r, \frac{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}{f - \varphi_1}\right) + S^*(r).$$

为着长化 $Q(r)$，我們只須求 $m\left(r,\frac{f^{(k)}-\varphi_1^{(k)}}{f-\varphi_1}\right)$ 及 $S^*(r)$ 的长函数. 准[2]，有($\rho < \rho'$)

$$m\left(\rho, \frac{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}{f - \varphi_1}\right) < a_k + a_k' \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0) - \varphi_1(0)|} + b_k \overset{+}{\log}\frac{1}{r}$$

$$+ b_k' \log\frac{\rho'}{\rho} + b_k'' \log\frac{\rho'}{\rho' - \rho} + [c_k + o(1)]\overset{+}{\log} T(\rho', f), \quad (13)$$

$a_k, \cdots, c_k$ 为仅依賴于 k 的数字常数.

显而易見

$$T(\rho,F)<T(\rho,f^{(k)})+\log\frac{1}{|f^{(k)}(0)-\varphi_2(0)|}+\log\frac{1}{|\varphi_3(0)-\varphi_1^{(k)}(0)|}+o[T(\rho,f)]$$

及

$$\overset{+}{\log} T(\rho, F) < \overset{+}{\log} T(\rho, f^{(k)}) + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|}$$

$$+ \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|\varphi_3(0) - \varphi_1^{(k)}(0)|} + o[\overset{+}{\log} T(\rho, f)]. \quad (14)$$

由[2]，有

$$T(\rho, f^{(k)}) < (k+1)T(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{f^{(k)}}{f}\right),$$

故

$$\overset{+}{\log} T(\rho, F) < \overset{+}{\log} T(\rho, f) + \overset{+}{\log} m\left(\rho, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + o[\overset{+}{\log} T(\rho, f)]$$

$$+ \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|} + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|\varphi_3(0) - \varphi_1^{(k)}(0)|} + \log 6(k+1). \quad (14)'$$

沿袭不等式(13)的求法而置 $\rho = r + \frac{1}{2}(\rho' - r)$，有

$$8\overset{+}{\log} m\left(\rho, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < \bar{a}_k + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|} + \overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \log\frac{\rho'}{r}$$

$$+ \log\frac{\rho'}{\rho' - r} + [1 + o(1)]\overset{+}{\log} T(\rho', f).$$

因此

$$S^*(r) < a'_k + \log\frac{1}{|\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|} + 2\log\frac{1}{|\varphi_2(0) - \varphi_3(0)|}$$

$$+ 2\log^+\frac{1}{|\varphi_3(0) - \varphi_1^{(k)}(0)|} + \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|} + \log^+\frac{1}{|f^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|}$$

$$+ \log\left|\frac{f^{(k)}(0) - \varphi_2(0)}{\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_2(0)}\right| + 3\log^+|F(0)| + \log\frac{1}{|F'(0)|} + 5\log^+\frac{1}{r}$$

$$+ 6\log\frac{\rho'}{r} + 7\log\frac{\rho'}{\rho' - n} + [9 + o(1)]\log^+ T(\rho', f) + o[T(r, f)]. \tag{15}$$

今书

$$\log\left|\frac{f(0) - \varphi_1(0)}{f^{(k)}(0) - \varphi_1^{(k)}(0)}\right| + \log\left|\frac{f^{(k)}(0) - \varphi_2(0)}{\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_2(0)}\right| = \log\frac{1}{|F(0)|}$$

$$+ \log\left|\frac{\varphi_2(0) - \varphi_3(0)}{\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_3(0)}\right| + \log\left|\frac{f(0) - \varphi_1(0)}{\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_2(0)}\right|,$$

我們不难算出表达式

$$\log|f(0) - \varphi_1(0)| + a'_k\log^+\log^+\frac{1}{|f(0) - \varphi_1(0)|} \quad 及 \quad \log\frac{1}{|F(0)|} + 3\log^+|F(0)|$$

分别圍界以

$$\log^+|f(0)| + \log^+|\varphi_1(0)| + \lambda_k \quad 及 \quad \log^+\frac{1}{|F(0)|} + 2\log^+|F(0)|,$$

λ_k 为仅依赖于 k 的数字常数. 从而我們得到 $Q(r)$ 的长化函数

$$S_k(r) = A_k + \log^+|\varphi_1(0)| + 2\log\frac{1}{|\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|} + \log\frac{1}{|\varphi_2(0) - \varphi_3(0)|}$$

$$+ 3\log^+\frac{1}{|\varphi_3(0) - \varphi_1^{(k)}(0)|} + \log^+|f(0)| + \log^+\frac{1}{|f(0)|} + \log^+\frac{1}{|f^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|}$$

$$+ 2\log^+|F(0)| + \log^+\frac{1}{|F(0)|} + \log\frac{1}{|F'(0)|} + B_k\log^+\frac{1}{r} + B'_k\log\frac{\rho'}{r}$$

$$+ B''_k\log\frac{\rho'}{\rho' - r} + [C_k + o(1)]\log^+ T(\rho', f) + o[T(r, f)].$$

綜上所述并以 ρ 代替 ρ', 我們得到熊氏定理的推广:

定理 I. 設 $f(x)$ 及 $\varphi_\nu(x)$ $(\nu=1,2,3)$ 为于全平面(开的)內亚純的函数, 使于 $r\to\infty$ 时

$$T(r, \varphi_1^{(k)}) = o[T(r, f^{(k)})], \tag{1}$$

$$T(r, \varphi_2) = o[T(r, f^{(k)})] \quad 及 \quad T(r, \varphi_3) = o[T(r, f^{(k)})], \tag{6}$$

而且 $\varphi_1^{(k)}, \varphi_2, \varphi_3$ 彼此之間是判別的. 若置 $F = \dfrac{f^{(k)} - \varphi_1^{(k)}}{f^{(k)} - \varphi_2}\cdot\dfrac{\varphi_3 - \varphi_2}{\varphi_3 - \varphi_1^{(k)}}$ 而設 $\varphi_\nu(0) \neq \infty$; $f(0) \neq 0, \infty, \varphi_1(0)$; $f^{(k)}(0) \neq \varphi_1^{(k)}(0), \varphi_2(0)$ 及 $F'(0) \neq 0$, 則不等式

$$[1 - o(1)]T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f - \varphi_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi_2}\right)$$

$$+ N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi_3}\right) + S_k^*(r, f; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \tag{16}$$

于 $r < \rho$ 时成立，在 φ_ν 为无穷級时可能要除去一个 r 的區間貫，其总长为有穷者，式中

$$S_k^*(r, f; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = A_k + \overset{+}{\log} |\varphi_1(0)| + 2 \log \frac{1}{|\varphi_1^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|}$$

$$+ \log \frac{1}{|\varphi_2(0) - \varphi_3(0)|} + 3 \log \frac{1}{|\varphi_3(0) - \varphi_1^{(k)}(0)|} + \overset{+}{\log} |f(0)|$$

$$+ \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(0)|} + \overset{+}{\log} \frac{1}{|f^{(k)}(0) - \varphi_2(0)|} + 2 \overset{+}{\log} |F(0)|$$

$$+ \overset{+}{\log} \frac{1}{|F(0)|} + \log \frac{1}{|F'(0)|} + B_k \log \frac{1}{r} + B_k' \log \frac{\rho}{r}$$

$$+ B_k'' \log \frac{\rho}{\rho - r} + [C_k + o(1)] \overset{+}{\log} T(\rho, f), \tag{17}$$

这里 $A_k, B_k, \cdots, C_k$ 为仅依賴于 k 的数字常数。

注意：函数 $f(x)$ 及 $\varphi_\nu(x)$ 于原点的种种限制不是必要的．例如，若 $f(0) = 0$ 或 ∞；我們可求函数 $f(x)$ 于原点近傍之 Taylor 或 Laurent 級数展开式

$$f(x) = c_\lambda x^\lambda + c_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots + \cdots (c_\lambda \neq 0),$$

而应用 Jensen-Nevanlinna 公式于函数 $\bar{f} = x^{-\lambda} f$，經类似于定理 I 的演論，可得与不等式 (16) 形式上相当的結果．但在 $f^{(k)}$ 为常数的情形下要除外，不过此时 $T(r, f)$ 的囿界是简单的．

2. 設 $g(x)$，$\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为于全平面（开的）[1]內亚純的函数，使于 $r \to \infty$ 时

$$T(r, \varphi) = o[T(r, g)] \quad 及 \quad T(r, \psi) = o[T(r, g)]. \tag{18}$$

我們置

$$F = \frac{\psi^2(\varphi - g^{(k)})}{\varphi g^2};$$

应用伐利隆 (Valiron) 氏所引出的不等式[4]于此补助函数 F 并設 $F(0) \neq 0, 1, \infty$ 及 $F'(0) \neq 0$，則有

$$m(r, F) < N\left(r, \frac{1}{F}\right) + N\left(r, \frac{1}{F - 1}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right)$$

$$+ 2m\left(r, \frac{F'}{F - 1}\right) + \log \left| \frac{F(0)(F(0) - 1)}{F'(0)} \right| + 1. \tag{19}$$

今书

$$F = \frac{\psi^2(\varphi - g^{(k)})}{\varphi g^2} = \left(\frac{\psi}{g}\right)^2 - \frac{\psi}{g}\left(\frac{g^{(k)}}{g} \cdot \frac{\psi}{\varphi}\right),$$

并借助于不等式

$$|X^2 - XY| \geqslant \frac{1}{2} [|X|^2 - |Y|^2],$$

有

$$\left|\frac{\psi}{g}\right|^2 \leqslant 2|F| + \left|\frac{g^{(k)}}{g} \cdot \frac{\psi}{\varphi}\right|^2.$$

---

1) 参看第一节的脚注。

于是留意着 $m\left(r,\left(\frac{\psi}{g}\right)^2\right)=2m\left(r,\frac{\psi}{g}\right)$,显然

$$m(r,F)>2m\left(r,\frac{1}{g}\right)-2m\left(r,\frac{g^{(k)}}{g}\right)-2m\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)-4m(r,\psi)-\log 4; \quad (20)$$

应用 Jensen-Nevanlinna 公式于 $m\left(r,\frac{1}{g}\right)$,而設 $g(0)\neq 0,\infty$,由式(20)得

$$T(r,g)<m(r,F)+2m\left(r,\frac{g^{(k)}}{g}\right)+2m\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+4m(r,\psi)$$
$$-m\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\log|g(0)|+\log 4. \quad (21)$$

这样一来,問題归結为求

$$N\left(r,\frac{1}{F}\right),\ N\left(r,\frac{1}{F-1}\right),\ m\left(r,\frac{F'}{F}\right) \text{ 及 } m\left(r,\frac{F'}{F-1}\right)$$

的长化函数.

1° 关于上述末二量的长化只須援用奈氏著名的引理[3]中之不等式——迭經伐利隆与米約二氏改进为

$$m\left(r,\frac{G'}{G}\right)<4\overset{+}{\log}T(\rho,G)+4\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|G(0)|}+3\log\frac{\rho}{\rho-r}+2\log\frac{\rho}{r}+\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho}+16,$$

于 $r<\rho$——到函数 F,有

$$m\left(r,\frac{F'}{F}\right)+2m\left(r,\frac{F'}{F-1}\right)+\log\left|\frac{F(0)(F(0)-1)}{F'(0)}\right|+1<12\overset{+}{\log}T(\rho,F)$$
$$+9\log\frac{\rho}{\rho-r}+6\log\frac{\rho}{r}+3\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho}+\log\left|\frac{F(0)(F(0)-1)}{F'(0)}\right|+61.$$

由于

$$m(\rho,F)<2m\left(\rho,\frac{1}{g}\right)+m\left(\rho,\frac{g^{(k)}}{g}\right)+m\left(\rho,\frac{1}{\varphi}\right)+3m(\rho,\psi)+\log 2$$

及 F 的极点含于 g^2 的零点与 ψ^2 的极点内而有

$$N(r,F)\leqslant 2N\left(r,\frac{1}{g}\right)+2N(r,\psi),$$

可知

$$T(\rho,F)<2T\left(\rho,\frac{1}{g}\right)+m\left(\rho,\frac{g^{(k)}}{g}\right)+m\left(\rho,\frac{1}{\varphi}\right)+3T(\rho,\psi)+\log 2,$$

由是

$$12\overset{+}{\log}T(\rho,F)<12\overset{+}{\log}T(\rho,g)+m\left(\rho,\frac{g^{(k)}}{g}\right)+o[\overset{+}{\log}T(\rho,g)]$$
$$+12\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|\varphi(0)|}+12\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|g(0)|}+36.$$

2° 长化 $N\left(r,\frac{1}{F}\right)$. 由于函数 F 的零点含于函数 $\frac{1}{g^{(k)}-\varphi}$, $\frac{1}{\psi^2}$ 及 g 的极点内,故

$$N\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{g^{(k)}-\varphi}\right)+2N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+N_k(r,g), \quad (22)$$

其中 $N_k(r, g) = 2N(r, g) - N(r, g^{(k)})$.

为要获得 $N_k(r, g)$ 的囿界，且此界限只能含有量 $N\left(r, \frac{1}{g}\right)$ 与 $N\left(r, \frac{1}{g-\psi}\right)$，我們先来証明如下的輔助命題：

引理. 設 $g(x)$ 及 $\psi(x)$ 为于全平面(开的)內亚純的函数；使于 $r \to \infty$ 时

$$T(r, \psi) = o[T(r, g)],$$

并且 ψ 不取零为值. 若 $g(0) \neq 0, \infty, \psi(0)$; $\psi'(0)g(0) - \psi(0)g'(0) \neq 0$, 則不等式

$$N_k(r, g) < N\left(r, \frac{1}{g}\right) + N\left(r, \frac{1}{g-\psi}\right) + o[T(r, g)] + S^*(r) \tag{23}$$

于 $|x| = r < \rho$ 时成立，在 g, ψ 为无穷級时，可能要除去一个 r 的區間貫其总长为有穷者，这里 $S^*(r)$ 适合 Nevanlinna 余項的条件.

誠然，我們取

$$G = \frac{g-\psi}{g}, \tag{24}$$

并应用奈氏第二基本不等式于 G 而命 $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ 及 $z_3 = \infty$，有

$$T(r, G) < N\left(r, \frac{1}{G}\right) + N\left(r, \frac{1}{G-1}\right) + N(r, G) - N_1(r) + S(r, G). \tag{25}$$

因函数 G 的零点含于函数 $\frac{1}{g-\psi}$ 及 ψ 的极点內，故

$$N\left(r, \frac{1}{G}\right) \leqslant N\left(r, \frac{1}{g-\psi}\right) + N(r, \psi); \tag{26}$$

依照相同的方法并留意到 $\psi \neq 0$，有

$$N\left(r, \frac{1}{G-1}\right) \leqslant N(r, g) \quad 及 \quad N(r, G) \leqslant N\left(r, \frac{1}{g}\right) + N(r, \psi). \tag{26'}$$

此外，自(24)解出 $\frac{1}{g} = \frac{1-G}{\psi}$ 及应用 Jensen-Nevanlinna 公式于函数 g, ψ 而設 $g(0) \neq 0, \infty$ 則有

$$T(r, g) < T(r, G) + T(r, \psi) + \log\left|\frac{g(0)}{\psi(0)}\right| + \log 2.$$

从 (25), (26), (26)′ 諸不等式，不难推得

$$T(r, g) < N(r, g) + N\left(r, \frac{1}{g}\right) + N\left(r, \frac{1}{g-\psi}\right) - \mathcal{N}_1(r, G) + Q(r, g),$$

其中 $\mathcal{N}_1(r, G) = 2N(r, G) - N(r, G') + N\left(r, \frac{1}{G'}\right)$ 及

$$\begin{aligned} Q(r, g) = 156 &+ 2\,\overset{+}{\log}\,|\psi(0)| + 6\,\overset{+}{\log}\,|g(0)| + \overset{+}{\log}\frac{1}{|g(0)|} \\ &+ \log\frac{1}{|\psi'(0)g(0) - \psi(0)g'(0)|} + 4\,\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + 5\log\frac{\rho}{r} \\ &+ 6\log\frac{\rho}{\rho - r} + [8 + o(1)]\,\overset{+}{\log}\,T(\rho, g) + o[T(r, g)]. \end{aligned}$$

显然，当 g 的极点为函数 $\frac{g^2}{g^{(k)}}$ 的极点时，则亦是函数 $\frac{g^2}{\psi' g-\psi g}$ 的极点，所以

$$N_k(r,g)\leqslant N\left(r,\frac{1}{G'}\right)+N(r,\psi)+N(r,\psi').$$

由此我們得到

$$N_k(r,g)<N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-\psi}\right)+o[T(r,g)]+S^*(r,g). \tag{23}$$

其

$$S^*(r,g)=156+2\,\overset{+}{\log}|\psi(0)|+6\,\overset{+}{\log}|g(0)|+\overset{+}{\log}\frac{1}{|g(0)|}$$

$$+\log\frac{1}{|\psi'(0)g(0)-\psi(0)g'(0)|}+4\,\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho}+5\log\frac{\rho}{r}$$

$$+6\log\frac{\rho}{\rho-r}+[8+o(1)]\,\overset{+}{\log}\,T(\rho,g).$$

今回到本題求 $N\left(r,\frac{1}{F}\right)$ 之长函数以(23)所給出之囿界代于(22)即得

$$N\left(r,\frac{1}{F}\right)<N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-\psi}\right)+N\left(r,\frac{1}{g^{(k)}-\varphi}\right)+S^*(r)+o[T(r,g)]. \tag{27}$$

3° 长化 $N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)$. 取 $F_1=F+\frac{\psi^2\psi^{(k)}}{\varphi g^2}$，因函数 $F-1$ 的零点含于函数 $\frac{\psi\psi^{(k)}}{g(g-\psi)}$，$(F-1)\frac{g}{g-\psi}$ 的零点及函数 F_1-1 与 $g-\psi$ 的公共零点中，故

$$N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{g-\psi}{(F_1-1)g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-\psi}\right)+(k+2)N(r,\psi)+N_0$$

或

$$N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant T\left(r,\frac{g-\psi}{(F_1-1)g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-\psi}\right)+(k+2)N(r,\psi)+N_0,$$

这里 N_0 表示函数 F_1-1 与 $g-\psi$ 的公共零点密指量.

我們先求 $m\left(r,(F_1-1)\frac{g}{g-\psi}\right)$ 的长化函数而写

$$(F_1-1)\frac{g}{g-\psi}=\frac{\psi}{\varphi}\left(\frac{g^{(k)}}{g}-\frac{g^{(k)}-\psi^{(k)}}{g-\psi}\right)-\frac{\psi}{g}-1,$$

由此导出

$$m\left(r,(F_1-1)\frac{g}{g-\psi}\right)<m\left(r,\frac{g^{(k)}}{g}\right)+m\left(r,\frac{g^{(k)}-\psi^{(k)}}{g-\psi}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{1}{g}\right)+m\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+2m(r,\psi)+3\log 2.$$

次求 $N\left(r,(F_1-1)\frac{g}{g-\psi}\right)$ 的长化函数，因为 $(F_1-1)\frac{g}{g-\psi}$ 的极点只能取自函数 F_1 的极点，即取自函数 g, $g-\psi$ 的零点再减去函数 F_1-1 与 $g-\psi$ 的公共零点，故

$$N\left(r,(F_1-1)\frac{g}{g-\psi}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-\psi}\right)-N_0.$$

因此,我們有

$$N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)<2N\left(r,\frac{1}{g}\right)+2N\left(r,\frac{1}{g-\psi}\right)+m\left(r,\frac{1}{g}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{g^{(k)}}{g}\right)+m\left(r,\frac{g^{(k)}-\psi^{(k)}}{g-\psi}\right)+\log\frac{1}{|\varphi(0)|}+\log\frac{1}{|g(0)|}$$

$$+\log|g(0)-\psi(0)|+\log\frac{1}{|F_1(0)-1|}+o[T(r,g)]. \tag{28}$$

如同前节的論述一样,我們不难計算 $m\left(r,\frac{g^{(k)}}{g}\right), m\left(r,\frac{g^{(k)}-\psi^{(k)}}{g-\psi}\right)$ 的长化函数及

$$3\log\frac{1}{|\varphi(0)|}+12\overset{+}{\log}\ \overset{+}{\log}\frac{1}{|\varphi(0)|}<4\overset{+}{\log}\frac{1}{|\varphi(0)|}+32,$$

$$\overset{+}{\log}\frac{1}{|g(0)|}+(a_k'+12)\overset{+}{\log}\ \overset{+}{\log}\frac{1}{|g(0)|}<\overset{+}{\log}\frac{1}{|g(0)|}+\lambda_k,$$

$$\log|g(0)-\psi(0)|+a_k'\overset{+}{\log}\ \overset{+}{\log}\frac{1}{|g(0)-\psi(0)|}+6\overset{+}{\log}|g(0)|+2\overset{+}{\log}|\psi(0)|$$

$$+2\log\frac{1}{|\psi(0)|}<7\overset{+}{\log}|g(0)|+\overset{+}{\log}|\psi(0)|+2\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\psi(0)}\right|+\mu_k,$$

λ_k, μ_k 为仅依賴于 k 的数字常数. 联結 (19), (21), (27), (28) 諸式,有

$$T(a,g)<4N\left(r,\frac{1}{g}\right)+3N\left(r,\frac{1}{g-\psi}\right)+N\left(r,\frac{1}{g^{(k)}-\varphi}\right)+S_k(r,g;\psi,\varphi), \tag{29}$$

其中

$$S_k(r,g;\psi,\varphi)=A_k+\overset{+}{\log}|\psi(0)|+2\overset{+}{\log}\frac{1}{|\psi(0)|}+4\overset{+}{\log}\frac{1}{|\varphi(0)|}$$

$$+7\overset{+}{\log}|g(0)|+2\overset{+}{\log}\frac{1}{|g(0)|}+\log\frac{1}{|\psi'(0)g(0)-\psi(0)g'(0)|}$$

$$+\log\left|\frac{F(0)}{F'(0)}\right|+\log\left|\frac{F(0)-1}{F_1(0)-1}\right|+B_k\overset{+}{\log}\frac{1}{r}+B_k'\log\frac{\rho}{r}$$

$$+B_k''\log\frac{\rho}{\rho-r}+[C_k+o(1)]\overset{+}{\log}T(\rho,g)+o[T(r,g)]. \tag{30}$$

設 φ_1 为适合条件 $T(r,\varphi_1)=o[T(r,g)]$ 的亚純函数,易知 $f=g+\varphi_1$ 与 g 有相同的增长級,故 $T(r,\varphi_1)=o[T(r,f)]$. 兹命 $\varphi_2=\varphi_1+\psi$, $\varphi_3=\varphi_1^{(k)}+\varphi$, 由不等式 (29), 我們得到米約氏定理的推广:

定理 II. 設 $f(x)$ 及 $\varphi_\nu(x)(\nu=1,2,3)$ 为于全平面(开的)内亚純的函数;使于 $r\to\infty$ 时

$$T(r,\varphi_\nu)=o[T(r,f)]\quad(\nu=1,2,3)$$

并且 φ_1 异于 φ_2, φ_3 而 φ_2, φ_3 不取零为值. 若置 $F=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2(f^{(k)}-\varphi_3)}{(\varphi_1^{(k)}-\varphi_3)(f-\varphi_1)^2}$, $F_1=F+\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2(\varphi_1^{(k)}-\varphi_2^{(k)})}{(\varphi_1^{(k)}-\varphi_3)(f-\varphi_1)^2}$ 及 $\Delta=(\varphi_1-\varphi_2)(f'-\varphi_1')-(\varphi_1'-\varphi_2)(f-\varphi_1)$ 而假定 $\varphi_\nu(0)\neq\infty$; $\varphi_1^{(k)}(0)\neq\varphi_3(0)$; $f(0)\neq 0,\infty,\varphi_1(0)$; $f^{(k)}(0)\neq\varphi_3(0)$; $F(0)\neq 1$; $F'(0)\neq 0$ 及 $\Delta(0)\neq 0$, 則

$$[1-o(1)]T(r,f) < 4N\left(r,\frac{1}{f-\varphi_1}\right)+3N\left(r,\frac{1}{f-\varphi_2}\right)+$$
$$+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi_3}\right)+S_k^*(r,f;\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \tag{31}$$

于 $r<\rho$ 时成立，在 φ_ν 为无穷級的情形可能要除去一个 r 的區間貫其总长为有穷者，其

$$S_k^*(r,f;\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)=\bar{A}_k+8\,\overset{+}{\log}|\varphi_1(0)|+\overset{+}{\log}|\varphi_2(0)|+2\,\overset{+}{\log}\frac{1}{|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|}$$
$$+4\,\overset{+}{\log}\frac{1}{|\varphi_1^{(k)}(0)-\varphi_3(0)|}+7\,\overset{+}{\log}|f(0)|+2\,\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)-\varphi_1(0)|}$$
$$+\log\frac{1}{|\Delta(0)|}+\log\left|\frac{F(0)}{F'(0)}\right|+\log\left|\frac{F(0)-1}{F_1(0)-1}\right|+B_k\,\overset{+}{\log}\frac{1}{r}+B_k'\log\frac{\rho}{r}$$
$$+B_k''\log\frac{\rho}{\rho-r}+[C_k+o(1)]\,\overset{+}{\log}\,T(\rho,f), \tag{32}$$

$\bar{A}_k, B_k, \cdots, C_k$ 为仅依賴于 k 的数字常数.

于此可作关于在原点之限制的注意一如对于定理I.

作者在作此文时，得到熊教授的指导，謹在这里表示衷心的謝意.

参 考 文 献

[1] Milloux, H., Sur une nouvelle extension d'une inégalité de M. R. Nevanlinna. *Jour. pures. et appliq.*, 19 (1940), 179—210.

[2] King-Lai Hoing, Sur la limitation de $T(r,f)$ sans intervention des pôles. *Bull. Sc. math.*, 80 (1956).

[3] Nevanlinna, R., *Le théorème de Picard-Borel*, Paris, 1929.

[4] Valiron, G., *Directions de Borel des fonctions meromorphes*, Paris, 1938.

ON THE FUNDAMENTAL INEQUALITIES WITHOUT THE INTERVENTION OF THE POLES

SHIEH HUI-CHUN
(*Fukien Normal College*)

ABSTRACT

H. Milloux and Professor K. L. Hiong had given two different inequalities which do not contain $N(r, f)$ and which extend the fundamental inequality of Nevanlinna by different methods. Professor K. L. Hiong has pointed out that we may extend the above results to a general case. We obtain the following two theorems:

Theorem I. Let $f(x)$ and $\varphi_\nu(x)(\nu = 1, 2, 3)$ be meromorphic functions, such that for $r \to \infty$

$$T(r, \varphi_1^{(k)}) = o[T(r, f^{(k)})], \quad T(r, \varphi_2) = o[T(r, f^{(k)})]$$

and

$$T(r, \varphi_3) = o[T(r, f^{(k)})],$$

and the φ_ν are different from one another. If $\varphi_\nu(0) \neq \infty$; $f(0) \neq 0, \infty, \varphi_1(0)$ and $f^{(k)}(0) \neq \varphi_1^{(k)}(0), \varphi_2(0)$, then the inequality

$$[1-o(1)]T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f-\varphi_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi_2}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi_3}\right) + S_k^*$$

is satisfied for $|x| = r < \rho$ except, in case when φ_ν is of infinite order, a sequence of the intervals that their total length is finite. The remainder S_k^* satisfies the conditions of Nevanlinna.

Theorem II. Let $f(x)$ and $\varphi_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ be meromorphic functions, such that for $r \to \infty$

$$T(r, \varphi_\nu) = o[T(r, f)], \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

and φ_2, φ_3 are distinct from φ_1 and do not reduce to zero. If $\varphi_\nu(0) \neq \infty$, $\varphi_3(0) - \varphi_1^{(k)}(0) \neq 0$, $f(0) \neq 0, \infty$; $F(0) \neq 0, 1$ and $F'(0) \neq 0$ $\left(F = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_3 - f^{(k)})}{(\varphi_3 - \varphi_1^{(k)})(f - \varphi_1)^2}\right)$, then the inequality

$$[1 - o(1)]T(r, f) < 4N\left(r, \frac{1}{f - \varphi_1}\right) + 3N\left(r, \frac{1}{f - \varphi_2}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi^2}\right) + S_k^*$$

is satisfied for $|x| = r < \rho$ except, in case when φ_ν is of infinite order, a sequence of the intervals that their total length is finite. The remainder S_k^* satisfies the conditions of Nevanlinna.

Remark. In theorems I and II we can remove by a known method the restrictions of the values of $f(x)$ and $\varphi_\nu(x)$ at the origin, which have imposed for the simplification.

第9卷 第3期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 3
1959 年 9 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Sept., 1959

关于 Goodman 在几乎有界函数中的一个猜测*

顧 万 才
(复 旦 大 学)

本文的目的在于指出曾經被 Goodman[1] 猜测过的下述定理 1 的証明. 它的副产品是我們找到了 Bieberbach-Eilenberg[2,3] 的定理的一个初等的証明1).

定理 1. 設 G 是满足 H-条件[1, p. 84]的綫性变换羣,并且包含变换 $L=\frac{\theta}{W}$, $|\theta|=1$. 設 $f(z)$, $f(0)=0$ 在单位圓 E 上对 G 几乎有界[1, p. 83], 那末

$$|f'(0)|\leqslant 1,$$

等号成立只有 $f(z)=\eta z$, $|\eta|=1$.

为了定理 1 的証明, 我們来叙述二个引理, 引理 1 和引理 2. 它們的証明分別見[1, p. 85], [4, p. 106].

引理 1. 設 F_0 是开集, 它的包是 F. 設 G 满足 H-条件. 如果 F 对 G 几乎有界[3, p. 85], 那末 F 的余集 CF 的面积

$$A(CF)\geqslant \pi.$$

式中等号成立只有 $CF=E$.

引理 2. 設区域 Ω 含有 z_0. 設 $B(\Omega)$ 和 $C(\Omega)$ 是函数族:

$f(z)\in B(\Omega)$: $f(z_0)=0$, $f(z)$ 在 Ω 上是正則的, $|f(z)|\leqslant 1$.

$F(z)\in C(\Omega)$: $F(z_0)=0$, $F(z)$ 在 Ω 上是正則的, $\frac{1}{F(z)}$ 略去一个面积 $\geqslant\pi$ 的集合. 設

$$M_B(z_0,\Omega)=\sup_{f\in B(\Omega)}|f'(z_0)|,\qquad M_C(z_0,\Omega)=\sup_{F\in C(\Omega)}|F'(z_0)|,$$

那末

$$M_B(z_0,\Omega)=M_C(z_0,\Omega).$$

定理 1 的証明. 因为 G 包含变换 $L=\frac{\theta}{W}$, $|\theta|=1$. 所以当 $f(z)$ 在 E 上对 G 几乎有界时, 函数 $F(z)=\frac{1}{f(z)}$ 在 E 上也对 G 几乎有界.

現在对 $\Omega=E$, $z_0=0$ 沿用引理 2. 由 Schwarz 引理, 应該

$$M_B(z_0,\Omega)=1,$$

并且等号只被 $f(z)=\eta z$, $|\eta|=1$ 达到. 証明完毕.

定理 1 的推論 (比較 [1, § 5]).

* 1959 年 1 月 19 日收到.

1) 过去的証明都用了拓扑学上的定理, 如著名的 Jordan 曲綫定理之类 [5].

定理 2. 設 $G_e = \left\{ L_{k+1} = \frac{(\eta^k + 1)W + (\eta^k - 1)}{(\eta^k - 1)W + (\eta^k + 1)}, k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1, \eta = e^{\pi i/n} \right\}$.
設 $f(z)$, $f(0) = 0$ 在 E 上对 G_e 几乎有界，那末当 $f(z) \neq \pm 1$ 时，

$$|f'(z)| \leqslant \frac{|1 - f^2(z)|}{1 - |z|^2}, \tag{1}$$

使 (1) 变做等式的函数必取形式

$$f_e(z) = \frac{(\eta - \bar{\beta}B)z + (B - \eta\beta)}{(\eta B - \bar{\beta})z + (1 - \eta\beta B)},$$

这里 $|\eta| = 1$, $|\beta| < 1$, $B \neq \pm 1$. 若 β 和 B 是常数，則(1)中等号只当 $z = \beta$, $f_e(\beta) = B$ 时成立. 这时 $f_e(z)$ 在 E 上对 G_e 几乎有界.

定理 3. 設 $G_e = \left\{ L_{k+1} = \frac{(\eta^k + 1)W + (\eta^k - 1)}{(\eta^k - 1)W + (\eta^k + 1)}, k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1, \eta = e^{\pi i/n} \right\}$.
設 $f(z)$, $f(0) = a_0$ 在 E 上对 G_e 几乎有界，那末

$$|f'(0)| \leqslant |1 - a_0^2|.$$

等号成立只有 $f(z) = (\eta z + a_0)/(\eta \bar{a}_0 z + 1)$, $|\eta| = 1$.

定理 4. 設 $G_e = \left\{ L_{k+1} = \frac{(\eta^k + 1)W + (\eta^k - 1)}{(\eta^k - 1)W + (\eta^k + 1)}, k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1, \eta = e^{\pi i/n} \right\}$.
設 $f(z)$, $f(0) = 0$ 在 E 上对 G_e 几乎有界，那末

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leqslant \left| \frac{1 + f(z)}{1 - f(z)} \right| \leqslant \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \tag{2}$$

$$|1 - f(z)| \geqslant 1 - |z|, \tag{3}$$

$$|1 + f(z)| \geqslant 1 - |z|. \tag{4}$$

在 (2), (3) 和 (4) 中任何一个等号成立，只有 $f(z) = \eta z$, $|\eta| = 1$.

参　考　文　献

[1] Goodman, A. W., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 82—97.
[2] Bieberbach, L., *Preus. Akad. Wiss. Sitzungsber*, **38** (1916), 940—955.
[3] Eilenberg, S., *Fund. Math.*, **25** (1935), 153—172.
[4] Alhfors, L. V. and Beurling, A. *Acta Math.*, **83** (1950), 100—129.
[5] Rogosinski, W. *J. London Math. Soc.*, **14** (1939), 4—11.

ÜBER DIE KONJEKTUR VON GOODMAN FÜR DIE BEINAHE BESCHRÄNKTEN FUNKTIONEN

LAI WAN-TZEI
(*Fu-Tan Universität*)

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Note wollen wir den folgenden Satz beweisen, der von Goodman[1] konjiziert wurde. Die Beweisführung dieses Satzes selbst enthält einen einfacheren und elementarischen Beweis des Bieberbach-Eilenbergschen Satzes [2,3,5].

Satz. Sei G die lineare Transformationsgruppe, die der H-Kondition [1, p. 84] genügt und die Transformation $L = \frac{\theta}{W}$, $|\theta| = 1$ enthält. Für $|z| < 1$ sei $f(z)$, $f(0)=0$ regulär und in bezug auf G beinahe beschränkt [1, p. 83].
Dann gilt

$$|f'(0)| \leqslant 1, \tag{1}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für die Funktionen $f(z) = \eta z$, $|\eta| = 1$ gilt.

Wir zeigen noch, dass die Sätze 3—5 von Goodman [1, §5] auch für die regulären Funktionen gelten.

第9卷 第3期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 3
1959 年 9 月 ACTA MATHEMATICA SINICA Sept., 1959

典型域的調和函数論(II)*

对称方陣双曲空間的調和函数

华罗庚 陸啓鏗
(中国科学院数学研究所)

2.1. 对称方陣双曲空間的調和函数 命 Z 代表 $n \times n$ 对称方陣

$$Z = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\, z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{12} & \sqrt{2}\, z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{1n} & z_{2n} & \cdots & \sqrt{2}\, z_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

$\mathfrak{R}_{II}$ 代表 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个复变数 $z_{11}, z_{12}, \cdots, z_{1n}, z_{22}, \cdots, z_{2n}, \cdots, z_{nn}$ 空間的域

$$I - Z\bar{Z} > 0. \tag{2.1.2}$$

我們引进运算子

$$\partial_Z = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z_{11}} & \frac{\partial}{\partial z_{12}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\ \frac{\partial}{\partial z_{12}} & \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z_{22}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial z_{1n}} & \frac{\partial}{\partial z_{2n}} & \cdots & \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z_{nn}} \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

及

$$\Delta_{II} = \operatorname{tr}\left((I - \bar{Z}Z)\,\partial_Z\,(I - Z\bar{Z})\,\bar{\partial}_Z\right), \tag{2.1.4}$$

注意后一运算子中乘积 $\partial_Z(I - Z\bar{Z})$ 只是形式上的矩陣乘积，前面的运算子并不作用于后一方陣的元素，更清楚的，运算子 Δ_{II} 即

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{II} = \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n} & \left(\delta_{\lambda\mu} - \sum_{\sigma=1}^{n} P_{\lambda\sigma} P_{\mu\sigma} z_{\lambda\sigma} \bar{z}_{\mu\sigma}\right) \\ & \left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=1}^{n} P_{\alpha\gamma} P_{\beta\gamma} z_{\alpha\gamma} \bar{z}_{\beta\gamma}\right) P_{\lambda\alpha} P_{\mu\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_{\lambda\alpha}\,\partial \bar{z}_{\mu\beta}}, \end{aligned}\right\} \tag{2.1.4$'$}$$

此处 $z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha}$ 及

$$P_{\alpha\beta} = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{如 } \alpha = \beta; \\ 1, & \text{如 } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

---

* 1959 年 3 月 6 日收到.

在 $\mathfrak{R}_{II}$ 域定义的有二級連續偏微分的实值函数 $u(Z)$ 称为 $\mathfrak{R}_{II}$ 域的調和函数，如果它适合偏微分方程

$$\Delta_{II} u = 0. \tag{2.1.6}$$

在 (2.1.4) 可見，在 $\mathfrak{R}_{II}$ 的边界 $\mathfrak{B}_{II}$ 上，此方程是蛻化的，而在 $\mathfrak{R}_{II}$ 域内，此方程是椭圓型的．下面我們要研究适合此方程的函数的边值問題，所用方法基本上与 I 相同[1]，故我們这里只著重敘述与 I 不同的地方．

定理 2.1.1. 若 $u(Z)$ 是 $\mathfrak{R}_{II}$ 域的調和函数，則經 $\mathfrak{R}_{II}$ 的运动羣 Γ^{II} 的变換后，仍然是 $\mathfrak{R}_{II}$ 域的調和函数．

証． 已知(华罗庚[1])[2] $\mathfrak{R}_{II}$ 域的运动羣 Γ^{II} 的变換如下：

$$\left.\begin{aligned} W &= (AZ+B)(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}, \\ A'\bar{B} &= \bar{B}'A,\ \bar{A}'A - B'\bar{B} = I. \end{aligned}\right\} \tag{2.1.7}$$

如是有

$$\begin{aligned} dW &= A\,dZ\,(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1} - (AZ+B)(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}\bar{B}\,dZ\,(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1} = \\ &= (\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}[(Z\bar{B}'+\bar{A}')A - (ZA'+B')\bar{B}]\,dZ\,(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1} = \\ &= (\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}\,dZ\,(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}. \end{aligned}$$

設 $(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}$ 的元素为 $a_{\alpha\beta}\ (1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n)$，上式即

$$P_{\alpha\beta}\,dw_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\alpha} P_{\lambda\mu}\,dz_{\lambda\mu}\,a_{\mu\beta}.$$

由于 $z_{\lambda\mu} = z_{\mu\lambda}$，故

$$\frac{\partial w_{\alpha\beta}}{\partial z_{\lambda\mu}} = \begin{cases} \dfrac{1}{P_{\alpha\beta}}(a_{\lambda\alpha}a_{\mu\beta} + a_{\mu\alpha}a_{\lambda\beta}), & (\lambda \neq \mu), \\ \dfrac{1}{P_{\alpha\beta}}\sqrt{2}\,a_{\lambda\alpha}a_{\mu\beta}, & (\lambda = \mu). \end{cases}$$

当 $\lambda \neq \mu$，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_{\lambda\mu}} &= \sum_{\alpha\leqslant\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}\frac{\partial w_{\alpha\beta}}{\partial z_{\lambda\mu}} = \sum_{\alpha<\beta}(a_{\lambda\alpha}a_{\mu\beta} + a_{\mu\alpha}a_{\lambda\beta})\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}} + \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\lambda\alpha}a_{\mu\alpha} + a_{\mu\alpha}a_{\lambda\alpha})\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\alpha}} = \\ &= \sum_{\alpha<\beta} a_{\lambda\alpha}a_{\mu\beta}P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}} + \sum_{\alpha>\beta} a_{\lambda\alpha}a_{\mu\beta}P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}} + \\ &\quad + \sum_{\alpha=\beta} a_{\lambda\alpha}a_{\mu\beta}P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}} = \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\lambda\alpha}\left(P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}\right)a_{\mu\beta}. \end{aligned}$$

当 $\lambda = \mu$，

1) 为簡单起見，这里用"I"表論文"典型域的調和函数論(I)矩陣双曲空間的調和函数"(华罗庚与陆启鏗，数学学报，8 (1958)，531—548)，并且以后用 §1.3，(1.2.4) 等表 I 中 §1.3 及公式 (1.2.4) 等．

2) 这里所引用的参考文献，見 I 中的参考文献．

$$\sqrt{2}\,\frac{\partial}{\partial z_{\lambda\lambda}}=\sqrt{2}\sum_{\alpha\leq\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}\frac{\partial w_{\alpha\beta}}{\partial z_{\lambda\lambda}}=\sum_{\alpha<\beta}2a_{\lambda\alpha}a_{\lambda\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\sqrt{2}\,a_{\lambda\alpha}a_{\lambda\alpha}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\alpha}}=\sum_{\alpha<\beta}a_{\lambda\alpha}a_{\lambda\beta}P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}+$$

$$+\sum_{\alpha>\beta}a_{\lambda\alpha}a_{\lambda\beta}P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}+\sum_{\alpha=\beta}a_{\lambda\alpha}a_{\lambda\beta}P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a_{\lambda\alpha}\left(P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}\right)a_{\lambda\beta}.$$

上两式合而言之,即

$$P_{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial z_{\lambda\mu}}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a_{\lambda\alpha}\left(P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}}\right)a_{\mu\beta},$$

或

$$\partial_Z=(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}\,\partial_W\,(\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}.$$

另一方面

$$I-W\bar{W}=I-(\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}(AZ+B)'(\bar{A}\bar{Z}+\bar{B})(B\bar{Z}+\bar{A})^{-1}=$$
$$=(\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}(I-Z\bar{Z})(B\bar{Z}+A)^{-1}. \tag{2.1.8}$$

我們有

$$(I-\bar{Z}Z)\,\partial_Z\,(I-Z\bar{Z})\,\bar{\partial}_Z=$$
$$=(\bar{Z}B'+A')\{(I-\bar{W}W)\,\partial_W\,(I-W\bar{W})\,\bar{\partial}_W\}(\bar{Z}B'+A')^{-1},$$

故

$$\operatorname{tr}((I-\bar{W}W)\,\partial_W\,(I-W\bar{W})\,\bar{\partial}_W)\,u(Z(W))=$$
$$=\operatorname{tr}((I-\bar{Z}Z)\,\partial_Z\,(I-Z\bar{Z})\,\bar{\partial}_Z)\,u(Z)=0.$$

这証明了定理 2.1.1.

已知 $\mathfrak{R}_{II}$ 域的 Poisson 核为 (华罗庚[3] § 4.9)

$$P_{II}(Z,S)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})}\cdot\frac{\det(I-Z\bar{Z})^{\frac{1}{2}(n+1)}}{|\det(I-Z\bar{S})|^{n+1}}, \tag{2.1.9}$$

此处 S 为对称的酉方陣,即

$$S=S',\ S\bar{S}=I,\quad S=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\,s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n}\\ s_{12} & \sqrt{2}\,s_{22} & \cdots & s_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ s_{1n} & s_{2n} & \cdots & \sqrt{2}\,s_{nn}\end{pmatrix}, \tag{2.1.10}$$

及

$$V(\mathfrak{C}_{II})=2^{\frac{n(3n+1)}{2}}\pi^{\frac{1}{4}n(n+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1-\nu)}. \tag{2.1.11}$$

定理 2.1.2. 經运动羣 Γ^{II} 的变换 (2.1.7), $\mathfrak{R}_{II}$ 的 Poisson 核的变化为

$$P_{II}(Z,S)=P_{II}(W,T)\,|\det(B\bar{S}+A)|^{-(n+1)},$$

此处

$$T=(AS+B)(\bar{B}S+\bar{A})^{-1}. \tag{2.1.12}$$

証. 易証

$$I-W\bar{T}=(\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}(I-Z\bar{S})(B\bar{S}+A)^{-1},$$

由上式及 (2.1.8) 有

$$\frac{\det(I-Z\bar{Z})^{\frac{1}{2}(n+1)}}{|\det(I-Z\bar{S})|^{n+1}}=\frac{\det(I-W\bar{W})^{\frac{1}{2}(n+1)}|\det(\bar{B}Z+\bar{A})|^{n+1}}{|\det(I-W\bar{T})(\bar{B}Z+\bar{A})(B\bar{S}+A)|^{n+1}}=$$

$$=\frac{\det(I-W\bar{W})^{\frac{1}{2}(n+1)}}{|\det(I-W\bar{T})|^{n+1}}|\det(B\bar{S}+A)|^{-(n+1)}.$$

定理証明.

定理 2.1.3. $\Re_{II}$ 的 Poisson 核 $P_{II}(Z,S)$ 对于 Z 是 $\Re_{II}$ 域的調和函数.

証. 根据定理 2.1.1 与 2.1.2, 我們可按照定理 1.2.2 的証明方法而只須証明

$$[\Delta_{II}P_{II}(Z,\bar{S})]_{Z=0}=0$$

便足够了.

由 (2.1.4)′ 及 (2.1.9) 有

$[\Delta_{II}P_{II}(Z,S)]_{Z=0}=$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})}\left[\sum_{\lambda,\alpha=1}^{n}P_{\lambda\alpha}P_{\lambda\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial\bar{z}_{\lambda\alpha}}\det(I-Z\bar{Z})^{\frac{n+1}{2}}\det(I-Z\bar{S})^{-\frac{n+1}{2}}\det(I-\bar{Z}S)^{-\frac{n+1}{2}}\right]_{Z=0}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})}\left\{2\sum_{\lambda<\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial\bar{z}_{\lambda\alpha}}\left[1-(n+1)\sum_{\beta<\gamma}|z_{\beta\gamma}|^2+\cdots\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+(n+1)\sum_{\beta<\gamma}z_{\beta\gamma}\bar{s}_{\beta\gamma}+\cdots\right]\times\left[1+(n+1)\sum_{\beta<\gamma}\bar{z}_{\beta\gamma}s_{\beta\gamma}+\cdots\right]\right\}_{Z=0}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})}\left[-2(n+1)\sum_{\lambda<\alpha}1+2(n+1)^2\sum_{\lambda<\alpha}\bar{s}_{\lambda\alpha}s_{\lambda\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})}\left[-n(n+1)^2+(n+1)^2\sum_{\lambda=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}|P_{\lambda\alpha}s_{\lambda\alpha}|^2\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})}[-n(n+1)^2+n(n+1)^2]=0.$$

定理証明.

2.2. $\Re_{II}$ 的边界之几何性質 命 $\bar{\Re}_{II}=\Re_{II}+\mathfrak{B}_{II}$, 其中 $\mathfrak{B}_{II}$ 为 $\Re_{II}$ 的边界点集. 把 $\bar{\Re}_{II}$ 的点分为点集 $\mathfrak{C}_{II}^{(n)},\mathfrak{C}_{II}^{(n-1)},\cdots,\mathfrak{C}_{II}^{(0)}$, 其中 $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}$ 是 Z 点使 $I-Z\bar{Z}$ 之秩为 r 者. 显然 $\mathfrak{C}_{II}^{(n)}=$ $=\Re_{II}$, $\mathfrak{C}_{II}^{(0)}=\mathfrak{C}_{II}$, 后者是由对称的酉方陣組成, 即 $\Re_{II}$ 的特征流形. 此外

$$\mathfrak{C}_{II}^{(r)}\cap\mathfrak{C}_{II}^{(s)}=\phi,\ \text{如}\ r\neq s$$

及

$$\mathfrak{B}_{II}=\mathfrak{C}_{II}^{(0)}+\mathfrak{C}_{II}^{(1)}+\cdots+\mathfrak{C}_{II}^{(n-1)}.$$

我們命 $U^{[2]}$ 表酉方陣 U 的对称直乘积 (見华 [3] 中 93 頁或陆 [1] 中 627 頁), 即若 $U=(u_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le n}$, 則 $U^{[2]}$ 为 $\frac{1}{2}n(n+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)$ 的方陣, 其元素为

$$u_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} = \frac{1}{P_{\alpha\beta}P_{\lambda\mu}}(u_{\alpha\lambda}u_{\beta\mu} + u_{\beta\lambda}u_{\alpha\mu}), \tag{2.2.1}$$

$$\alpha \leqslant \beta,\ \lambda \leqslant \mu,$$

此处指标 $(\alpha\beta)$ 是按下面的次序排列：

$(11), (12), \cdots, (1n), (22), (23), \cdots, (2n), \cdots, (n-1, n), (n, n)$.

命 $\mathfrak{U}^{[2]}$ 表所有酉方陣 $U^{[2]}$ 所成之羣. 以 $\mathfrak{S}_s^{[2]}$ $(s \leqslant n)$ 表其子羣，由下列的元素組成者：

$$\begin{pmatrix} \Gamma^{(s)} & 0 \\ 0 & U^{(n-s)} \end{pmatrix}^{[2]} \tag{2.2.2}$$

此处 $\Gamma^{(s)}$ 是 $s \times s$ 实正交方陣，$U^{(n-s)}$ 是 $(n-s) \times (n-s)$ 酉方陣.

以 $\mathfrak{M}^{(s)}$ 表商空間 $\mathfrak{U}^{[2]}/\mathfrak{S}_s^{[2]}$. 我們有

定理 2.2.1. $\mathfrak{C}_{\rm II}^{(r)}$ 能分解为 $\mathfrak{R}_{\rm II}(r)$ 与 $\mathfrak{M}^{(n-r)}$ 之拓扑乘积. 此处 $\mathfrak{R}_{\rm II}(r)$ 表域

$$I^{(r)} - W^{(r)}\overline{W^{(r)}} > 0, \qquad W^{(r)} = W^{(r)\prime}.$$

証. 我們作映照

$$Z = U'\begin{pmatrix} I^{(n-r)} & 0 \\ 0 & W^{(r)} \end{pmatrix}U, \tag{2.2.3}$$

此处 $W \in \mathfrak{R}_{\rm II}(r)$, U 是酉方陣使 $U^{[2]} \in \mathfrak{M}^{(n-r)}$. 我們要証明此映照把 $\mathfrak{R}_{\rm II}(r) \times \mathfrak{M}^{(n-r)}$ 拓扑地映为 $\mathfrak{C}_{\rm II}^{(r)}$.

显然由 (2.2.3) 定义的 Z 使 $I - Z\overline{Z}$ 之秩为 r, 即使 $Z \in \mathfrak{C}_{\rm II}^{(r)}$; 換言之，映照把拓扑乘积 $\mathfrak{R}_{\rm II}(r) \times \mathfrak{M}^{(n-r)}$ 映入 $\mathfrak{C}_{\rm II}^{(r)}$.

任一 $Z \in \mathfrak{C}_{\rm II}^{(r)}$ 必存在一酉方陣 U_0, 使

$$Z = U_0'\begin{pmatrix} I^{(n-r)} & 0 \\ 0 & W_0 \end{pmatrix}U_0, \qquad W_0 \in \mathfrak{R}_{\rm II}(r).$$

$U_0^{[2]}$ 必属于 $\mathfrak{U}^{[2]}$ 对其子羣 $\mathfrak{S}_{n-r}^{[2]}$ 之某一左边旁，即可书为

$$U_0^{[2]} = U_1^{[2]}U^{[2]},$$

此处 $U^{[2]} \in \mathfrak{M}^{(n-r)}$, 而 $U_1^{[2]} \in \mathfrak{S}_{n-r}^{[2]}$ 即为下之形式

$$U_1^{[2]} = \begin{pmatrix} \Gamma^{(n-r)} & 0 \\ 0 & A^{(r)} \end{pmatrix}^{[2]}, \qquad \Gamma\Gamma' = I,\ A\overline{A}' = I,$$

故

$$Z = U_0'\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W_0 \end{pmatrix}U_0 = U'U_1'\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W_0 \end{pmatrix}U_1U =$$

$$= U'\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A'W_0A \end{pmatrix}U = U'\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}U,$$

此处 $W = A'W_0A \in \mathfrak{R}_{\rm II}(r)$, $U^{[2]} \in \mathfrak{M}^{(n-r)}$. 这証明映照 (2.2.3) 把 $\mathfrak{R}_{\rm II}(r) \times \mathfrak{M}^{(n-r)}$ 映为 (onto) $\mathfrak{C}_{\rm II}^{(r)}$.

最后証明映照 (2.2.3) 是一一的.

如有一 $U_1^{[2]} \in \mathfrak{M}^{(n-r)}$ 及一 $W_1 \in \mathfrak{R}_{\rm II}(r)$ 使得

$$U'\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}U = U_1'\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}U_1,$$

則有

$$\bar{U}_2\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}U_2, \tag{2.2.4}$$

此处

$$U_2=U_1U^{-1}=\begin{pmatrix} A^{(n-r)} & B^{(n-r,r)} \\ C^{(r,n-r)} & D^{(r)} \end{pmatrix}.$$

由于 U_2 是酉方陣,故有

$$A\bar{A}'+B\bar{B}'=I,\ A\bar{C}'+B\bar{D}'=0,\ C\bar{C}'+D\bar{D}'=I, \tag{2.2.5}$$

由 (2.2.4) 知

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B}W \\ \bar{C} & \bar{D}W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ W_1C & W_1D \end{pmatrix},$$

此必須

$$\left.\begin{array}{ll} A=\bar{A}, & B=\bar{B}W, \\ \bar{C}=W_1C, & \bar{D}W=W_1D. \end{array}\right\} \tag{2.2.6}$$

由此可見 A 是实方陣,并由 (2.2.5) 第一式得

$$B\bar{B}'=\bar{B}B'.$$

由 (2.2.6) 第二式,

$$\bar{B}B'=B\bar{B}'=\bar{B}W\bar{W}'B'$$

或

$$\bar{B}(I-W\bar{W}')B'=0,$$

这是不可能的,除非 $B=0$, 因之 A 为实正交方陣,并 $C=0$, 而 D 为酉方陣. 故

$$U_1=UU_2=U\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

此示 $U_1^{[2]}$ 与 $U^{[2]}$ 属于羣 $\mathfrak{U}^{[2]}$ 对其分羣 $\mathfrak{S}_{n-r}^{[2]}$ 的同一左旁系. 故映照 (2.2.3) 是一一的. 定理証明.

此外容易証明:

定理 2.2.2. $\mathfrak{R}_{II}$ 的运动羣的任一变换 (2.1.7) 把 $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}$ 的点仍变为 $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}$ 的点, 并且 $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}$ 对此羣是可递的.

2.3. $\mathfrak{R}_{II}$ 的 Poisson 积分的边界性质

我們先証明下面两个引理:

定理 2.3.1. 設 m 是任意的正整数 ($\geqslant 2$) 及 $0<r<1$, 则

$$\left\{\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right\}^{-1}\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_m^2=1}\frac{(1-r)^{\frac{m}{2}}}{|1-r(x_1-ix_2)|^m}\dot{x}=1.$$

証. 命 $\rho=\sqrt{1-x_3^2-\cdots-x_m^2}$ 及

$$x_1=\rho\cos\theta,\ x_2=\rho\sin\theta,\ x_3=x_3,\ \cdots,\ x_m=x_m,$$

则

$$dx_1^2+\cdots+dx_n^2=(\cos\theta\,d\rho-\rho\sin\theta\,d\theta)^2+(\sin\theta\,d\rho+\rho\cos\theta\,d\theta)^2+\sum_{\nu=3}^{m}dx_\nu^2=$$

$$=\rho^2d\theta^2+d\rho^2+\sum_{\nu=3}^{m}dx_\nu^2.$$

由于 $\det\left(I^{(m-2)}+\frac{1}{\rho^2}(x_3,\cdots,x_m)'(x_3,\cdots,x_m)\right)=1+\frac{1}{\rho^2}(x_3^2+\cdots+x_m^2)=\frac{1}{\rho^2}$，

可知

$$\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_m^2=1}\frac{\dot{x}}{|1-r(x_1-ix_2)|^m}=\int\cdots\int_{x_3^2+\cdots+x_m^2<1}dx_3\cdots dx_m\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-r\rho e^{-i\theta}|^m}.$$

因

$$(1-r\rho e^{i\theta})^{-\frac{m}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma(k+1)}(r\rho e^{i\theta})^k,$$

可知

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-r\rho e^{-i\theta}|^m}=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma(k+1)}\right]^2(r\rho)^{2k}.$$

又因

$$\int\cdots\int_{x_3^2+\cdots+x_m^2<1}(1-x_3^2-\cdots-x_m^2)^k\,dx_3\cdots dx_m=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{m-2}\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)},$$

故

$$\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_m^2=1}\frac{\dot{x}}{|1-r(x_1-ix_2)|^m}=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{m-2}}{\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^2\Gamma(k+1)}=\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(1-r)^{-\frac{m}{2}}.$$

这証明了定理.

由此引理便可如 I 中定理 1.4.1 一样証明.

定理 2.3.2. 設 $\varphi(x_1,\cdots,x_m)$ 是在 $x_1^2+\cdots+x_m^2=1$ 定义的連續函数，则

$$\lim_{r\to1}\left\{\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right\}^{-1}\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_m^2=1}\varphi(x_1,\cdots,x_m)\frac{(1-r^2)^{\frac{m}{2}}}{|1-r(x_1-ix_2)|^m}\dot{x}=\varphi(1,0,\cdots,0).$$

下面定理是关于 $\mathfrak{R}_{II}$ 的 Poisson 积分之重要的性質：

定理 2.3.3. 設 $\varphi(S)$ 是在 $\mathfrak{C}_{II}$ 上定义的实值連續函数，$Q=U_0'\begin{pmatrix}I^{(n-r)}&0\\0&Z_1\end{pmatrix}U_0$ 是 $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}(0<r<n)$ 的点，则

$$\lim_{Z\to Q}\int_{\mathfrak{C}_{II}(n)}\varphi(S)P_I(Z,S)\dot{S}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II}(r))}\int_{\mathfrak{C}_{II}(r)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}I^{(n-r)}&0\\0&S_1\end{pmatrix}U_0\right)\frac{\det(I^{(r)}-Z_1\bar{Z}_1)^{\frac{r+1}{2}}}{|\det(I^{(r)}-Z_1\bar{S}_1)|^{r+1}}\dot{S}_1.$$

此示，后一积分代表在 $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}=\mathfrak{R}_{II}(r)\times\mathfrak{M}^{(n-r)}$ 上連續的函数，其对 $\mathfrak{R}_{II}(r)$ 的坐标 Z_1 是 $\mathfrak{R}_{II}(r)$ 域的調和函数．此外，若 $S_0\in\mathfrak{C}_{II}$，则

$$\lim_{Z\to S_0}\int_{\mathfrak{C}_{II}}\varphi(S)P_{II}(Z,S)\dot S=\varphi(S_0).$$

証. 取 $r=n-1$, $Z=\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的特殊情况，而只須証明

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II}(n))}\int_{\mathfrak{C}_{II}(n)}\varphi(S)\frac{(1-\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}{|1-\rho\bar s_{11}|^{n+1}}\dot S=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II}(n-1))}\int_{\mathfrak{C}_{II}(n-1)}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & S_1\end{pmatrix}\right)\dot S_1, \tag{2.3.1}$$

至于其余的証明，可参閲 I § 1.4. 方法上完全是平行的.

命

$$S=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12}\cdots s_{1n}\\ s_{12} & \\ \vdots & S_1\\ s_{1n} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_{11} & s\\ s & S_1\end{pmatrix},$$

其中

$$s_{11}=x_1+ix_2,\ s_{12}=x_3e^{i\theta_1},\ \cdots,\ s_{1n}=x_{n+1}e^{i\theta_{n-1}}. \tag{2.3.2}$$

任与一組实数 $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 适合

$$x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1,$$

易証必有一个 $(n-1)\times(n-1)$ 对称方陣 S_1 使

$$\left.\begin{aligned}&\overline{s_{11}(s_{12},\cdots,s_{1n})}+(s_{12},\cdots,s_{1n})\bar S_1=0,\\ &(s_{12},\cdots,s_{1n})'\overline{(s_{12},\cdots,s_{1n})}+S_1\bar S_1=I;\end{aligned}\right\} \tag{2.3.3}$$

换言之，使 S 是一对称酉方陣. S_1 是 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个实参数. 我們以 $\dot S_1$ 表 (2.3.3) 的体积元素.

命

$$\psi(x_1,\cdots,x_{n+1})=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II}(n))}\int_{\substack{s_{11}\bar s+s\bar S_1=0\\ s'\bar s+S_1\bar S_1=I}}\varphi(S)\dot S_1, \tag{2.3.4}$$

及

$$\dot S=2^{2n-1}\dot x\dot S_1.$$

由定理 2.3.2 及 (2.3.4) 知

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II}(n))}\int_{\mathfrak{C}_{II}(n)}\varphi(S)\frac{(1-\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}{|1-\rho\bar s_{11}|^{n+1}}\dot S=$$

$$=\lim_{\rho\to 1}2^{2n-1}\int_{x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1}\psi(x_1,\cdots,x_{n+1})\frac{(1-\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}{|1-\rho(x_1-ix_2)|^{n+1}}\dot x=$$

$$=\left\{\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right\}2^{2n-1}\psi(1,0,\cdots,0)=\frac{2^{2n-1}\left\{\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right\}}{V(\mathfrak{C}_{II}(n))}\int_{S_1\bar S_1=I}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & S_1\end{pmatrix}\right)\dot S_1.$$

由于

$$2^{2n-1}\left\{\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right\}\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\text{II}}(n))}=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\text{II}}(n-1))},$$

这証明了(2.3.1)式.

2.4. 极值原理与边值問題之解

定义. 实值函数 $u(Z)$ 称为属于 $\mathfrak{Y}_{\text{II}}$ 类,如果它在 $\bar{\mathfrak{R}}_{\text{II}}$ 連續,在每一 $\mathfrak{C}_{\text{II}}^{(r)}(r=1,\cdots,n)$ 中对 $\mathfrak{R}_{\text{II}}(r)$ 的坐标是 $\mathfrak{R}_{\text{II}}(r)$ 的調和函数.

定理 2.4.1. 如 $u(Z)$ 是 $\mathfrak{Y}_{\text{II}}$ 类函数,则 $u(Z)$ 在 $\mathfrak{C}_{\text{II}}$ 取最大値与最小値.

这定理的証明如 I 中定理 1.5.1, 这里不再重复.

根据定理 2.3.3 及 2.4.1 我們得

定理 2.4.2. 任与在 $\mathfrak{C}_{\text{II}}$ 上連續的函数 $\varphi(S)$, 則存在一而只一个 $\mathfrak{Y}_{\text{II}}$ 类函数 $u(Z)$ 在 $\mathfrak{C}_{\text{II}}$ 上取已与的边界值 $\varphi(S)$, 此函数即

$$u(Z)=\int_{\mathfrak{C}_{\text{II}}}\varphi(S)P_{\text{II}}(Z,S)\dot{S}.$$

定理 2.4.3. $P_{\text{II}}(Z,S)$ 是 $\mathfrak{Y}_{\text{II}}$ 类函数的再生核(repoducing kernel), 即如 $u(Z)\in\mathfrak{Y}_{\text{II}}$, 則

$$u(Z)=\int_{\mathfrak{C}_{\text{II}}}u(S)P(Z,S)\dot{S}.$$

值得注意的是,任一 $\mathfrak{Y}_{\text{II}}$ 类函数 $u(Z)$ 在每一 $\mathfrak{C}_{\text{II}}^{(r)}(r=1,\cdots,n)$ 上,对 $\mathfrak{R}_{\text{II}}(r)$ 的坐标

$$Z^{(r)}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\,z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1r}\\ z_{12} & \sqrt{2}\,z_{22} & \cdots & z_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ z_{1r} & z_{2r} & \cdots & \sqrt{2}\,z_{rr}\end{pmatrix}$$

适合一組偏微分方程

$$\left.\begin{aligned}-\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{\gamma=1}^{r}P_{\alpha\gamma}P_{\beta\gamma}z_{\alpha\gamma}\bar{z}_{\beta\gamma}\right)P_{\lambda\alpha}P_{\mu\beta}\frac{\partial^2u(Z)}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial\bar{z}_{\mu\beta}}=0,\\ \lambda,\mu=1,\cdots,r.\end{aligned}\right\}\quad(2.4.1)$$

这是因为 $\mathfrak{R}_{\text{II}}(r)$ 的 Poisson 核 $P_{\text{II}}^{(r)}(Z,S)$ 不止适合一个偏微分方程,而且适合一組偏微分方程

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{\gamma=1}^{n}P_{\alpha\gamma}P_{\beta\gamma}z_{\alpha\gamma}\bar{z}_{\beta\gamma}\right)P_{\lambda\alpha}P_{\mu\beta}\frac{\partial^2P_{\text{II}}^{(r)}(Z,S)}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial\bar{z}_{\mu\beta}}=0,$$

$$\lambda,\mu=1,\cdots,n;\ r=1,\cdots,n.$$

THEORY OF HARMONIC FUNCTIONS OF THE CLASSICAL DOMAINS (II)

HARMONIC FUNCTIONS IN THE HYPERBOLIC SPACE OF SYMMETRIC MATRICES

L. K. HUA AND K. H. LOOK

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Let $\mathfrak{R}_{II}(n)$ be the domain

$$I - Z\bar{Z} > 0, \quad Z = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\, z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{12} & \sqrt{2}\, z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{1n} & z_{2n} & \cdots & \sqrt{2}\, z_{nn} \end{pmatrix},$$

and let $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}(n)$ be the points Z of the closure $\overline{\mathfrak{R}}_{II}(n)$ such that $I - Z\bar{Z}$ is of rank r. Obviously $\mathfrak{C}_{II}^{(n)}(n) = \mathfrak{R}_{II}(n)$, and $\mathfrak{C}_{II}^{(0)}(n) = \mathfrak{C}_{II}(n)$ is the characteristic manifold of $\mathfrak{R}_{II}(n)$ (c. f. Hua [3]). Each $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}(n)$ is invariant under the group of motion of $\mathfrak{R}_{II}(n)$.

Let $U^{[2]}$ denote an $\frac{1}{2} n(n+1) \times \frac{1}{2} n(n+1)$ matrix defined by an $n \times n$ unitary matrix $U = (u_{\alpha\beta})_{1 \le \alpha, \beta \le n}$ such that the elements of $U^{[2]}$ are

$$u_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} = \frac{1}{P_{\alpha\beta} P_{\lambda\mu}} (u_{\alpha\lambda} u_{\beta\mu} + u_{\beta\lambda} u_{\alpha\mu}) \qquad (\alpha \leqslant \beta, \lambda \leqslant \mu)$$

with $P_{\alpha\alpha} = \sqrt{2}$ and $P_{\alpha\beta} = 1 \quad (\alpha \neq \beta)$ (c. f. Hua [3] p. 93 or Look [1] p. 627). All the matrices $U^{[2]}$ form a group $\mathfrak{U}^{[2]}$. Its subset of elements $\begin{pmatrix} \Gamma^{(s)} & 0 \\ 0 & U^{(n-s)} \end{pmatrix}^{[2]}$, where $\Gamma^{(s)}$ is an $s \times s$ real orthogonal matrix and $U^{(n-s)}$ an $(n-s) \times (n-s)$ unitary matrix, is a subgroup $\mathfrak{S}_s^{[2]}$ of $\mathfrak{U}^{[2]}$. Denote $\mathfrak{M}^{(s)}$ the quotient space $\mathfrak{U}^{[2]}/\mathfrak{S}_s^{[2]}$. We prove that

There is an one-to-one real analytic transformation carrying $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}(n)$ onto the topological product $\mathfrak{R}_{II}(r) \times \mathfrak{M}^{(n-r)}$.

Let $Q = U_0' \begin{pmatrix} I^{(n-r)} & 0 \\ 0 & Z_1^{(r)} \end{pmatrix} U_0$ be a point of $\mathfrak{C}_{II}^{(r)}(n)$ and $\varphi(S)$ a real-valued continuous function defined on $\mathfrak{C}_{II}(n)$. If a point Z of $\mathfrak{R}_{II}(n)$ approaches Q, then we have the following formula:

$$\lim_{Z \to Q} \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II}(n))} \int_{\mathfrak{C}_{II}(n)} \varphi(S) \frac{\det (I^{(n)} - Z\bar{Z})^{\frac{n+1}{2}}}{|\det (I^{(n)} - Z\bar{S})|^{n+1}} \dot{S} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II}(r))} \int_{\mathfrak{C}_{II}(r)} \varphi \left(U_0' \begin{pmatrix} I^{(n-r)} & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} U_0 \right) \frac{\det (I^{(r)} - Z_1 \bar{Z}_1)^{\frac{r+1}{2}}}{|\det (I^{(r)} - Z_1 \bar{S}_1)|^{r+1}} \dot{S}_1,$$

where $V(\mathfrak{C}_{II}(n))$ and $\dot{S}$ denote the total volume and the volume element of $\mathfrak{C}_{II}(n)$ respectively.

Applying this formula and the theorem above, we solve the "Dirichlet problem" of the partial differential equation

$$\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n}\left(\delta_{\lambda\mu}-\sum_{\sigma=1}^{n}P_{\lambda\sigma}P_{\mu\sigma}z_{\lambda\sigma}\bar{z}_{\mu\sigma}\right)\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{\gamma=1}^{n}P_{\alpha\gamma}P_{\beta\gamma}z_{\alpha\gamma}\bar{z}_{\beta\gamma}\right)P_{\lambda\alpha}P_{\mu\beta}\frac{\partial^2 u(Z)}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial\bar{z}_{\mu\beta}}=0$$

associated to $\mathfrak{R}_{II}(n)$.

第9卷 第3期 数学学报 Vol. 9, No. 3
1959年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA Sept., 1959

典型域的調和函数論(III)*

斜对称方陣双曲空間的調和函数

华罗庚 陸啓鏗
(中国科学院数学研究所)

3.1. 斜对称方陣双曲空間的調和函数 命Z代表$n\times n$斜对称方陣

$$Z=\begin{pmatrix} 0 & z_{12} & \cdots & z_{1n}\\ -z_{12} & 0 & \cdots & z_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -z_{1n} & -z_{2n} & \cdots & 0\end{pmatrix}, \tag{3.1.1}$$

$\mathfrak{R}_{III}(n)$代表$\frac{n(n-1)}{2}$个复变数$z_{12}, z_{13}, \cdots, z_{1n}, z_{23}, \cdots, z_{2n}, \cdots, z_{n-1,n}$空間的域

$$I+Z\bar{Z}>0. \tag{3.1.2}$$

我們引进运算子

$$\partial_Z=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z_{12}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{1n}}\\ -\frac{\partial}{\partial z_{12}} & 0 & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{2n}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{\partial}{\partial z_{1n}} & -\frac{\partial}{\partial z_{2n}} & \cdots & 0\end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

及

$$\Delta_{III}=\operatorname{tr}((I+\bar{Z}Z)\,\partial_Z\,(I+Z\bar{Z})\,\bar{\partial}_Z), \tag{3.1.4}$$

注意后一运算子中$\partial_Z(I+Z\bar{Z})$只是形式上的矩陣乘积，前面的运算子并不作用用后一方陣的元素，此即

$$\Delta_{III}=\sum_{\lambda,\mu,\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{\lambda\mu}-\sum_{\sigma=1}^{n} z_{\lambda\sigma}\bar{z}_{\mu\sigma}\right)\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{\gamma=1}^{n} z_{\alpha\gamma}\bar{z}_{\beta\gamma}\right) q_{\lambda\alpha}q_{\mu\beta}\frac{\partial^2}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial\bar{z}_{\mu\beta}}, \tag{3.1.4'}$$

此处$z_{\alpha\beta}=-z_{\beta\alpha}$及

$$q_{\alpha\beta}=\begin{cases}0, & 如\ \alpha=\beta;\\ 1, & 如\ \alpha\neq\beta.\end{cases} \tag{3.1.5}$$

定义 在$\mathfrak{R}_{III}$域定义的有二級連續偏微分方程的实值函数$u(Z)$称为$\mathfrak{R}_{III}$域的調和函数，如果它适合偏微分方程

$$\Delta_{III}u=0. \tag{3.1.6}$$

定理 3.1.1. 若$u(Z)$是$\mathfrak{R}_{III}$域的調和函数，則經$\mathfrak{R}_{III}$的运动羣Γ^{III}的变换后，仍然

* 1959年3月6日收到.

是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 域的調和函数.

証： 巳知(华罗庚[1])* $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 域的运动羣 Γ^{III} 的变换为

$$\left.\begin{aligned} W &= (AZ+B)(-\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}, \\ A'\bar{B} &= -\bar{B}'A,\ A'\bar{A}-\bar{B}'B = I. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.7}$$

如是有

$$dW = (-\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}\,dZ(-\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}.$$

命 $(-\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}$ 的元素为 $b_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=1,\cdots,n)$，上式即

$$q_{\alpha\beta}\,dW_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} b_{\lambda\alpha}\,q_{\lambda\mu}\,dz_{\lambda\mu}\,b_{\mu\beta}.$$

由于 $z_{\lambda\mu} = -z_{\mu\lambda}$，故

$$q_{\lambda\mu}\,q_{\alpha\beta}\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial z_{\lambda\mu}} = b_{\lambda\alpha}\,b_{\mu\beta} - b_{\mu\alpha}\,b_{\lambda\beta}.$$

两边乘以 $q_{\alpha\beta}$ 得

$$q_{\lambda\mu}\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial z_{\lambda\mu}} = q_{\alpha\beta}(b_{\lambda\alpha}\,b_{\mu\beta} - b_{\mu\alpha}\,b_{\lambda\beta}),$$

故有

$$q_{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial z_{\lambda\mu}} = \sum_{\alpha<\beta}\left(\frac{\partial}{\partial W_{\alpha\beta}}\right)q_{\lambda\mu}\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial z_{\lambda\mu}} =$$

$$= \sum_{\alpha<\beta} q_{\alpha\beta}\,b_{\lambda\alpha}\,b_{\mu\beta}\frac{\partial}{\partial W_{\alpha\beta}} - \sum_{\alpha<\beta} q_{\alpha\beta}\,b_{\mu\alpha}\,b_{\lambda\beta}\frac{\partial}{\partial W_{\alpha\beta}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} b_{\lambda\alpha}\left(q_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial W_{\alpha\beta}}\right)b_{\mu\beta},$$

此即

$$\partial_Z = (-\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}\,\partial_W\,(-\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}.$$

另一方面

$$I + W\bar{W} = (-\bar{B}Z+\bar{A})'^{-1}(I+Z\bar{Z})(-B\bar{Z}+A)^{-1},$$

故得

$$\mathrm{tr}\,[(I+\bar{Z}Z)\,\bar{\partial}_Z\,(I+Z\bar{Z})\,\partial_Z] = \mathrm{tr}\,[(I+\bar{W}W)\bar{\partial}_W\,(I+W\bar{W})\,\partial_W].$$

这証明定理 3.1.1.

巳知 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 域的 Poisson 核为(华罗庚[3]，华罗庚与陸启鏗[1])，

$$P_{\mathrm{III}}(Z,K) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n))}\cdot\frac{\det(I+Z\bar{Z})^{a}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{2a}}, \tag{3.1.8}$$

此处

$$a = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & \text{如 } n \text{ 为偶数}, \\ n/2, & \text{如 } n \text{ 为奇数}. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n)) = \begin{cases} \dfrac{\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right)^2}{2^{(\frac{n}{2}-1)^2+1}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}, & \text{当 } n \text{ 为偶}, \\ \dfrac{\left(\left(\frac{n+1}{2}-1\right)!\right)^2}{2^{(\frac{n+1}{2}-1)^2-1}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n+1)-1}\displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}, & \text{当 } n \text{ 为奇}. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

---

* 这里所引用的文献見 I 中的参考文献．又这里分别以 I，II 表前两篇文章“曲型域上的調和函数論” I 与 II．

又

$$K = U' F^{(n)} U \tag{3.1.11}$$

其中U为酉方阵，

$$F^{(n)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{当 } n \text{ 为偶}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus 0, \text{当 } n \text{ 为奇}. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

定理 3.1.2. 經运动羣 $\Gamma^{\rm III}$ 的变换(3.1.7), $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 的 Poisson 核的变化为

$$P_{\rm III}(Z, K) = P_{\rm III}(W, J)|\det(B\overline{K} + A)|^{-a},$$

此处

$$J = (AK + B)(-\overline{B}K + \overline{A})^{-1}. \tag{3.1.13}$$

此定理之証明如Ⅱ中定理 2.1.2.

定理 3.1.3. $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 的 Poisson 核 $P_{\rm III}(Z, K)$ 对变数Z是 $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 域的調和函数.

証：根据定理 3.1.1 与 3.1.2 知我們只須証明

$$[\Delta_{\rm III} P_{\rm III}(Z, K)]_{Z=0} = 0.$$

上式左边卽

$$\left[\sum_{\lambda,\alpha=1}^{n} q_{\lambda\alpha}^2 \frac{\partial^2 P_{\rm III}(Z, K)}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial \bar{z}_{\lambda\alpha}}\right]_{Z=0} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm III})}\left[\sum_{\lambda,\alpha=1}^{n} q_{\lambda\alpha}^2 \frac{\partial^2}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial \bar{z}_{\lambda\alpha}} \det(I + Z\overline{Z})^a \det(I + Z\overline{K})^{-a} \det(I + \overline{Z}K)^{-a}\right]_{Z=0} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm III})}\left[\sum_{\lambda,\alpha=1}^{n} q_{\lambda\alpha}^2 \frac{\partial^2}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial \bar{z}_{\lambda\alpha}}\left\{1 - 2a\sum_{\beta<\gamma}|z_{\beta\gamma}|^2 + \cdots\right\}\left\{1 + 2a\sum_{\beta<\gamma} z_{\beta\gamma}\bar{k}_{\beta\gamma} + \cdots\right\} \times\right.$$

$$\left.\times\left\{1 + 2a\sum_{\beta<\gamma}\bar{z}_{\beta\gamma}k_{\beta\gamma} + \cdots\right\}\right]_{Z=0} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm III})}\left[\sum_{\lambda,\alpha=1}^{n}(-2a)q_{\lambda\alpha}^2 + 4a^2\sum_{\lambda,\alpha=1}^{n} k_{\lambda\alpha}\bar{k}_{\lambda\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm III})}[-2a\,n(n-1) + 4a^2\,{\rm tr}\,(K\overline{K}')]. \tag{3.1.14}$$

由 (3.1.11) 与 (3.1.12) 知

$${\rm tr}\,(K\overline{K}') = \begin{cases} n, & \text{当 } n \text{ 为偶}, \\ n-1, & \text{当 } n \text{ 为奇}. \end{cases}$$

由 (3.1.9) 知，无論 n 为奇为偶时 (3.1.14) 皆等于零. 定理証明.

3.2. 斜对称方阵双曲空間的边界之几何性质 命 $\overline{\mathfrak{R}}_{\rm III}$ 表 $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 的閉包，$\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)}\left(r = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 表 $\overline{\mathfrak{R}}_{\rm III}$ 中的点使得方陣 $I + Z\overline{Z}$ 之秩为 $n - 2r$ 者所成的点集. 显然 $\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2[\frac{n}{2}])} = \mathfrak{C}_{\rm III}$, $\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n)} = \mathfrak{R}_{\rm III}$. 此外

$$\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)} \cap \mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2s)} = \phi, \qquad \text{当 } r \neq s$$

并且 $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 的边界 $\mathfrak{B}_{\rm III}$ 为

$$\mathfrak{B}_{\rm III}=\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n)}+\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2)}+\cdots+\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2[\frac{n}{2}])}.$$

我們把指标 $(\alpha\beta)$ $(1\leqslant\alpha<\beta\leqslant n)$ 安排一次序如下：

$$(12),(13),\cdots,(1n),(23),(24),\cdots,(2n),\cdots,(n-1,n).$$

对任一 $n\times n$ 方陣 $A=(a_{\alpha\beta})$，我們定义一 $\frac{n(n-1)}{2}$ 行列的方陣 $A^{(2)}$（华罗庚[3] 第98頁，陆启鏗[1] 第 625 頁），称为 A 的斜对称直乘积者，其第 $(\alpha\beta)$ 行 $(\lambda\mu)$ 列的元素为

$$A_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}=a_{\alpha\lambda}a_{\beta\mu}-a_{\alpha\mu}a_{\beta\lambda},\qquad(\alpha<\beta,\lambda<\mu).$$

命 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 表所有方陣 $U^{(2)}$ 所成之羣，此处 U 是 $n\times n$ 酉方陣．命 $\mathfrak{S}_{2r}^{(2)}\left(r=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 表 $\mathfrak{U}^{(2)}$ 之分羣，其元素是由方陣

$$\begin{pmatrix}U^{(2r)}&0\\0&U^{(n-2r)}\end{pmatrix}^{(2)}$$

組成，此处 $U^{(n-2r)}$ 是任意的 $(n-2r)$ 行列酉方陣，$U^{(2r)}$ 是 $2r$ 行列酉方陣适合下面关系者：

$$U'F^{(2r)}U=F^{(2r)}.\tag{3.2.1}$$

命 $\mathfrak{M}^{(2r)}$ 代表商空間 $\mathfrak{U}^{(2)}/\mathfrak{S}_{2r}^{(2)}$，我們有

定理 3.2.1. $\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)}\left(r=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 能表为 $\mathfrak{R}_{\rm III}(n-2r)$ 与 $\mathfrak{M}^{(2r)}$ 的拓扑乘积．

証： 作变换

$$Z=U'\begin{pmatrix}F^{(2r)}&0\\0&W^{(n-2r)}\end{pmatrix}U,$$

其中 $W\in\mathfrak{R}_{\rm III}(n-2r)$，$U^{(2)}\in\mathfrak{M}^{(2r)}$．可以如 II 中定理 2.2.1 一样証明，变换 (3.2.1) 把 $\mathfrak{R}_{\rm III}(n-2r)\times\mathfrak{M}^{(2r)}$ 映为 $\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)}$．現証此映照是一一的．

如有 $\mathfrak{R}_{\rm III}(n-2r)\times\mathfrak{M}^{(2r)}$ 的两点映为 $\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)}$ 的同一点，即有

$$U'\begin{pmatrix}F^{(2r)}&0\\0&W\end{pmatrix}U=U_1'\begin{pmatrix}F^{(2r)}&0\\0&W_1\end{pmatrix}U_1.$$

命 $V=UU_1^{-1}=\begin{pmatrix}A^{(2r)}&B\\C&D\end{pmatrix}$，得

$$V'\begin{pmatrix}F^{(2r)}&0\\0&W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F^{(2r)}&0\\0&W_1\end{pmatrix}\overline{V}'.\tag{3.2.2}$$

由于 $V'\overline{V}=I$，必須

$$A'\overline{A}+C'\overline{C}=I^{(2r)},\ A'\overline{B}+C'\overline{D}=0,\ B'\overline{B}+D'\overline{D}=I.\tag{3.2.3}$$

又由 (3.2.2) 知

$$A'F=F\overline{A}',\ C'W=F\overline{C}',\ B'F=W_1\overline{D}',\ D'W=W_1\overline{D}'.\tag{3.2.4}$$

故

$$\begin{aligned}I^{(2r)}&=F(\overline{A}'A+\overline{C}'C)F'=F\overline{A}'AF'+F\overline{C}'CF'=A'F\cdot F'\overline{A}+C'W\overline{W}'\overline{C}=\\&=A'\overline{A}+C'\overline{C}-C'(I-W\overline{W}')\overline{C}=I^{(2r)}-C'(I-W\overline{W}')\overline{C}.\end{aligned}$$

此示

$$C'(I-W\overline{W}')\overline{C}=0.$$

由于 $I-W\overline{W}'>0$，故必須

$$C = 0.$$

因此$B = 0$, $A\bar{A}' = I$, $D\bar{D}' = I$.

但由(3.2.4)第一式知,A还須适合

$$A'FA = F\bar{A}'A = F.$$

故$V^{(2)}$必属于$\mathfrak{S}_{2r}^{(2)}$. 这証明定理.

定理 3.2.2. $\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)}\left(r = 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$在运动羣$\Gamma^{\rm III}$的变换下不变,并且对于此羣是可遞的.

3.3. $\mathfrak{R}_{\rm III}$域的Poisson积分的边界性质

定理 3.3.1. 設$\varphi(K)$是在$\mathfrak{C}_{\rm III}$上定义的实値連續函数,则当$Q \in \mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)}\left(0<r<\left[\frac{n}{2}\right]\right)$时,

$$\lim_{Z\to Q}\int_{\mathfrak{C}_{\rm III}} \varphi(K)P_{\rm III}(Z, K)\dot{K}$$

是$\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)} \cong \mathfrak{R}_{\rm III}(n-2r) \times \mathfrak{M}^{(2r)}$的連續函数,此函数对$\mathfrak{R}_{\rm III}(n-2r)$的坐标是$\mathfrak{R}_{\rm III}(n-2r)$域的調和調数. 此外,如$K_0 \in \mathfrak{C}_{\rm III}$,

$$\lim_{Z\to K_0}\int_{\mathfrak{C}_{\rm III}} \varphi(K)P_{\rm III}(Z, K)\dot{K} = \varphi(K_0).$$

証: 我們只要証明

$$\lim_{Z\to U_0'\begin{pmatrix} F^{(2r)} & 0 \\ 0 & Z_0^{(n-2r)}\end{pmatrix}U_0}\int_{\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n)}} \varphi(K)P_{\rm III}(Z, K)\dot{K} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm III}(n-2r))}\int_{\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)}} \varphi\left(U_0'\begin{pmatrix} F^{(2r)} & 0 \\ 0 & K_1^{(n-2r)}\end{pmatrix}U_0\right)\frac{\det(I + Z_0\bar{Z}_0)^{a-2r}\dot{K}_1}{\det(I + Z_0\bar{K}_1)^{2(a-r)}}. \quad (3.3.1)$$

我們只須証$r = 1$的情形,而不妨令Z沿一特殊的途径趋于$\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2r)}$的一特殊的点(参閱I §1.4),故可取

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0\end{pmatrix}\dot{+}O^{(n-2)} \text{ 与 } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\dot{+}O^{(n-2)},$$

而仅要証明

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm III}(n))}\int_{\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n)}} \varphi(K)\frac{(1-\rho^2)^{2a}}{|1-\rho\bar{k}_{12}|^{4a}}\dot{K} = \quad (3.3.2)$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm III}(n-2))}\int_{\mathfrak{C}_{\rm III}^{(n-2)}} \varphi\left(\begin{pmatrix} F^{(2)} & 0 \\ 0 & K_1\end{pmatrix}\right)\dot{K}_1,$$

此处

$$K = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ -k_{12} & 0 & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -k_{1n} & -k_{2n} & \cdots & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k' & L\end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

我們先考虑n为偶数的情况. 此时$a = \frac{n-1}{2}$. 由于$K\bar{K}' = I^{(n)}$, 故

$$k\bar{k}' = 1,\ k\bar{L}' = 0,\ k'\bar{k} + L\bar{L}' = I^{(n-1)}. \qquad (3.3.4)$$

反之，我們要証明，任与一 $n-1$ 維复向量 k 适合 $k\bar{k}'=1$ 者，必有一斜对称方陣 L 使 (3.3.4) 成立. 这是因为任一 k 必有一酉方陣 $U^{(n-1)}$ 使 $k=(1,0,\cdots,0)\,U^{(n-1)}$，取

$$L = U^{(n-1)\prime}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V^{(n-2)} \end{pmatrix}U^{(n-1)},$$

便可符合我們的要求，其中 $V^{(n-2)}$ 是任意之斜对称酉方陣.

命

$$k_{12} = x_1 + ix_2,\ k_{13} = x_3 + ix_4,\ \cdots,\ k_{1n} = x_{2n-3} + ix_{2n-2}, \qquad (3.3.5)$$

其中 $x_1,\cdots,x_{2n-2}$ 为实参数适合 $x_1^2+\cdots+x_{2n-2}^2=1$ 者.

我們可书

$$\dot{K} = 8^{n-\frac{11}{6}}\left(\frac{n}{2}-1\right)^2 \dot{x}L.$$

若命

$$\psi(x_1,\cdots,x_{2n-2}) = \frac{8^{n-\frac{11}{6}}\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}{V(\mathfrak{C}_{\text{III}}(n))}\int_{k\bar{L}'=0,\ k'\bar{k}+L\bar{L}'=I}\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & L \end{pmatrix}\right)\dot{L}, \qquad (3.3.6)$$

并应用 II 中定理 2.3.1 及 2.3.2，則 (3.3.2) 之左边为

$$\lim_{\rho\to1}\int_{x_1^2+\cdots+x_{2n-2}^2=1}\psi(x)\frac{(1-\rho^2)^{n-1}}{|1-\rho(x_1-ix_2)|^{2(n-1)}}\dot{x} = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\psi(1,0,\cdots,0) =$$

$$= \frac{8^{n-\frac{11}{6}}\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\cdot 2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)V(\mathfrak{C}_{\text{III}}(n))}\int_{(1,0,\cdots,0)\bar{L}'=0,\,L\bar{L}'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I^{(n-2)}\end{pmatrix}}\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\cdots0 \\ -1 & & \\ 0 & & L \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}\right)\dot{L}. \qquad (3.3.7)$$

因为 $L\bar{L}'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I^{(n-2)}\end{pmatrix}$，必須有 $L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_1\end{pmatrix}$，$K_1$ 是 $n-2$ 阶斜对称酉方陣. 又因

$$\frac{8^{n-\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)V(\mathfrak{C}_{\text{III}}(n))} = \frac{8^{n-\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)\dfrac{\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right)^2}{2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+1}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}} =$$

$$= \frac{1}{\left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-3}}\Gamma(n-2)}\right]\cdot\left[\dfrac{\left(\left(\frac{n-2}{2}-1\right)!\right)^2}{2^{\left(\frac{n-2}{2}-1\right)^2+1}}(8\pi)^{\frac{1}{4}(n-2)(n-3)}\displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n-3}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right]} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\text{III}}(n-2))},\quad \left[\text{这里应用了公式 } \Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)\right]$$

故 (3.3.7) 的末式等于

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III}(n-2))}\int_{\mathfrak{C}_{III}(n-2)}\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & O \\ -1 & 0 & \\ O & & K_1 \end{pmatrix}\right)\dot{K}_1.$$

这証明了 (3.3.2) 式当 n 是偶数时为眞.

現考慮 n 为奇数的情况. 显然的 $\mathfrak{R}_{III}(n)$ 可嵌入于 $\mathfrak{R}_{III}(n+1)$ 中而作为其子空間, 且 $\mathfrak{C}_{III}(n)$ 是包含于 $\mathfrak{C}_{III}(n+1)$ 中. 因为如 $K_1 \in \mathfrak{C}_{III}(n+1)$, K_1 可书为 (华罗庚与陆启鏗[1])

$$K_1 = \begin{pmatrix} K & U'h' \\ -hU' & 0 \end{pmatrix},\ K = U'F^{(n)}U,\ h = (0, \cdots, 0, e^{i\theta}).$$

任与一在 $\mathfrak{C}_{III}(n)$ 上連續的函数 $\varphi(K)$, 可如下的定义一在 $\mathfrak{C}_{III}(n+1)$ 上連續的函数 $\varphi^*(K_1)$:

$$\varphi^*(K_1) = \varphi(K).$$

由 (3.1.10) 知 $V(\mathfrak{C}_{III}(n)) = \frac{1}{2\pi} V(\mathfrak{C}_{III}(n+1))$, 故有

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III}(n))}\int_{\mathfrak{C}_{III}(n)} \varphi(K)\frac{\det(I+Z\bar{Z})^{n/2}}{|\det(I+Z\bar{K})|^n}\dot{K} =$$

$$= \frac{1}{2\pi V(\mathfrak{C}_{III}(n))}\int_0^{2\pi}\int_{\mathfrak{C}_{III}(n)}\varphi^*\left(\begin{pmatrix} K & U'h' \\ -hU & 0 \end{pmatrix}\right)\frac{\det(I+Z\bar{Z})^{n/2}}{|\det(I+Z\bar{K})|^n}d\theta\,\dot{K} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III}(n+1))}\int_{\mathfrak{C}_{III}(n+1)}\varphi^*(K_1)\frac{\det\left(I^{(n+1)}+\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{n/2}}{\left|\det\left(I^{(n+1)}+\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bar{K}_1\right)\right|^n}\dot{K}_1.$$

由于 $n+1$ 是偶数, 故可利用已証明的結果証明 (3.3.2) 式当 n 为奇数时亦成立.

3.4. 边值問題

定义 在 $\mathfrak{R}_{III}(n)$ 定义的实値連續函数 $u(Z)$ 称为属于 $\mathfrak{Y}_{III}$ 类, 如在每一 $\mathfrak{C}_{III}^{(n-2r)}(n) \cong \cong \mathfrak{R}_{III}(n-2r) \times \mathfrak{M}^{(2r)}\left(r = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]-1\right)$ 中, u 对 $\mathfrak{R}_{III}(n-2r)$ 的坐标是 $\mathfrak{R}_{III}(n-2r)$ 的調和函数.

根据以上的結果, 我們解決如下的边值問題:

定理 3.4.1. 給与在 $\mathfrak{C}_{III}$ 上連續的实值函数 $\varphi(K)$, 则存在唯一的一个 $\mathfrak{Y}_{III}$ 类函数 $u(Z)$ 在 $\mathfrak{C}_{III}$ 上取已与的边界值 $\varphi(K)$, 此函数即

$$u(Z) = \int_{\mathfrak{C}_{III}}\varphi(K)P_{III}(Z, K)\dot{K}. \tag{3.4.1}$$

証: 由定理 3.3.1 知, 由 (3.4.1) 所定义的函数 $u(Z)$ 是 $\mathfrak{Y}_{III}$ 类函数. 此解之唯一性可由下面之极值原理得之:

定理 3.4.2. 如 $u(Z)$ 是 $\mathfrak{Y}_{III}$ 类函数, 则必在 $\mathfrak{C}_{III}$ 上取最大値与最小値.

后一定理之証明方法如 I 中定理 1.5.1, 这里不再贅述.

又由定理 3.4.1 之唯一性可得

定理 3.4.3. $\mathfrak{R}_{III}$ 域的 Poisson 核 $P_{III}(Z,K)$ 是 $\mathfrak{Y}_{III}$ 类函数的再生核, 即任一 $u(Z) \in \mathfrak{Y}_{III}$ 必有

$$u(Z) = \int_{\mathfrak{C}_{III}} u(K)P_{III}(Z, K)\dot{K}. \tag{3.4.2}$$

THEORY OF HARMONIC FUNCTIONS OF THE CLASSICAL DOMAINS (III)

HARMONIC FUNCTIONS IN THE HYPERBOLIC SPACE OF SKEW SYMMETRIC MATRICES

L. K. Hua and K. H. Look
(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

Abstract

Before to establish the boundary value problem of the partial differential equation of second order

$$(1)\quad \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n}\left(\delta_{\lambda\mu}-\sum_{\sigma=1}^{n} z_{\lambda\sigma}\bar{z}_{\mu\sigma}\right)\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{\gamma=1}^{n} z_{\alpha\gamma}\bar{z}_{\beta\gamma}\right) q_{\lambda\alpha}q_{\mu\beta}\frac{\partial^2 u(Z)}{\partial z_{\lambda\alpha}\partial \bar{z}_{\mu\beta}}=0$$

$$(q_{\lambda\mu}=1 \text{ for } \lambda\neq\mu \text{ and } q_{\lambda\lambda}=0),$$

which is of elliptic type in the domain $\mathfrak{R}_{\text{III}}(n)$: $I+Z\bar{Z}>0$, $Z=(z_{\alpha\beta})$, $z_{\alpha\beta}=-z_{\beta\alpha}$, $\alpha,\beta=1,\cdots,n$, and is degenerated on the boundary $\mathfrak{B}_{\text{III}}(n)$ of $\mathfrak{R}_{\text{III}}(n)$, we first consider the geometrical structure of the boundary $\mathfrak{B}_{\text{III}}$. Let $\mathfrak{C}_{\text{III}}^{(n-2r)}(n)$ be the points Z of $\bar{\mathfrak{R}}_{\text{III}}(n)$ (the closure of $\mathfrak{R}_{\text{III}}$) such that $I+Z\bar{Z}$ is of rank $n-2r\left(r=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right)$. Then

$$\mathfrak{B}_{\text{III}}(n)=\mathfrak{C}_{\text{III}}^{(n-2)}(n)+\cdots+\mathfrak{C}_{\text{III}}^{(n-2[\frac{n}{2}])}(n),$$

where $\mathfrak{C}_{\text{III}}^{(n-[\frac{n}{2}])}(n)=\mathfrak{C}_{\text{III}}(n)$ is the characteristic manifold of $\mathfrak{R}_{\text{III}}(n)$ (c. f. Hua and Look[1])*. The points of $\mathfrak{C}_{\text{III}}(n)$ are of the type $K=U'F^{(n)}U$, U running over all unitary matrices of order n and $F^{(2\nu)}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $F^{(2\nu+1)}=F^{(2\nu)}\dotplus 0$.

For a matrix $U=(u_{\alpha\beta})$ of order n, we define a matrix $U^{(2)}$ of order $\frac{1}{2}n(n-1)$ such the element of $U^{(2)}$ at the $(\alpha\beta)$ row and the $(\lambda\mu)$ colume is given by

$$u_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}=u_{\alpha\lambda}u_{\beta\mu}-u_{\alpha\mu}u_{\beta\lambda}\ (\alpha<\beta,\ \lambda<\mu)$$

(c. f. Hua[3], p. 93 and Look[1], p. 625).

When U runs over all unitary matrices, the matrices $U^{(2)}$ form a group $\mathfrak{U}^{(2)}$, which has a subgroup $\mathfrak{S}_{2n}^{(2)}$ generating by the elements

$$\begin{pmatrix}V^{(2r)}&0\\0&U^{(n-2r)}\end{pmatrix}^{(2)},$$

where $V^{(2r)}$ are unitary matrices of order $2r$ satisfying the relation $V'F^{(2r)}V=F^{(2r)}$ and $U^{(n-2r)}$ are arbitrary unitary matrices of order $n-2r$. $\mathfrak{C}_{\text{III}}^{(n-2r)}(n)$ can be mapped by an

*The reference appended in Part I of this paper [*Acta Math. Sinica*, 8 (1958), 531—547].

one-to-one real analytic transformation onto the topological product $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(n-2r)\times\mathfrak{M}^{(2r)}$, where $\mathfrak{M}^{(2r)}$ denotes the quotient space $\mathfrak{U}^{(2)}/\mathfrak{S}_{2r}^{(2)}$.

When n is even, for a real-valued function $\varphi(K)$ continuous on $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n)$, we have, as in the two previous parts of this paper,

$$\lim_{Z\to U_0'\left(\begin{smallmatrix}F^{(2n)} & 0\\ 0 & Z_1\end{smallmatrix}\right)U_0}\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n))}\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n)}\frac{\varphi(K)\det(I+Z\bar{Z})^{\frac{n-1}{2}}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{n-1}}\dot{K}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n-2r))}\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n-2r)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}F^{(2r)} & 0\\ 0 & K_1\end{pmatrix}U_0\right)\frac{\det(I^{(n-2r)}+Z_1\bar{Z}_1)^{\frac{n-1}{2}-r}}{|\det(I^{(n-2r)}+Z_1\bar{K}_1)|^{n-1-2r}}\dot{K}_1,$$

where $V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})$ and $\dot{K}$ are the total volume and the volume element of $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ respectively.

When n is odd, the closure of $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(n)$ can be imbedded into the closure of $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(n+1)$ such that $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n)$ appears as a submanifold of $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n+1)$. Then we can apply the results for even n and obtain the corresponding formulae for odd n.

After the above consideration, it is clear how to suggest and then solve the boundary value problem of the equation (1) in $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{III}}(n)$. Denote $\mathfrak{Y}_{\mathrm{III}}$ the class of real-valued functions $u(Z)$, each of which in $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{III}}(n)$ is continuous and on $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}^{(n-2r)}(n)\cong\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(n-2r)\times\mathfrak{M}^{(2r)}$ is harmonic with respect to the coordinates of $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(n-2r)$, i. e., $u(Z)$ satisfies the differential equation (1) corresponding to $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(n-2r)$ $\left(r=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)$. Then, for any real-valued function $\varphi(K)$ continuous on $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n)$, there is a unique function $u(Z)$ of $\mathfrak{Y}_{\mathrm{III}}$ which takes the given boundary values $\varphi(K)$ on $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n)$. Moreover, this function can be represented explicitly by the "Poisson integral" of $\varphi(K)$:

$$u(Z)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n))}\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n)}\varphi(K)\frac{\det(I+Z\bar{Z})^{a}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{2a}}\dot{K},$$

where $a=\frac{n-1}{2}$ for even n and $a=\frac{n}{2}$ for odd n, and $V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n))$ is the total volume of $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(n)$.

第9卷 第3期
1959年9月

数学学报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol. 9, No. 3
Sept., 1959

堆垒素数論的一些新結果*

潘承洞
(北京大学)

И. М. Виноградов 在 1937 年証明了所有充分大的奇数N皆可表成三素数之和，即有

$$N = p_1 + p_2 + p_3,$$

其中 $p_i(i = 1, 2, 3)$ 为奇素数. 而本文的目的在于限制 $p_i(i = 1, 2, 3)$ 的变化范围. 証明了下面三个定理:

定理 1. 設N为充分大的奇数,则必有 $p_i(i = 1, 2, 3)$ 满足

$$p_i = \frac{1}{3}N + O(N^{\frac{5+12c}{6+12c}+\varepsilon}), \quad (i = 1, 2, 3)$$

使

$$N = p_1 + p_2 + p_3,$$

其中 c 为 $\zeta\left(\frac{1}{2} + it, w\right)$[1)], $(0 < w < 1)$ 的阶, ε 为任意小之正数. 定理 1 显見优于 Haselgrove[1] 的結果,他只証明了

$$p_i = \frac{1}{3}N + O(N^{\frac{63}{64}+\varepsilon}),$$

而我們知道可取

$$c = \frac{15}{92} + \varepsilon^{[2]}, \quad (\varepsilon > 0).$$

定理 2. 設 N 为充分大的奇数則必有 p_1, p_2, p_3 为素数且满足 $p_1 \leqslant N$, $p_2 \leqslant N$, $p_3 \leqslant N^{\frac{2c}{1+2c}+\varepsilon}$, 使

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

由定理 2 立即可得下面的推論:

推論: 若N充分大,则在N与 $N + N^{\frac{2c}{1+2c}+\varepsilon}$ 之間必有 Goldfach 数[2)].

定理 3. 設N为充分大的奇数，则必有素数 p_1, p_2, p_3 满足 $p_1 \leqslant N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$、$p_2 \leqslant N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, $N - N^{\frac{2}{3}+\varepsilon} < p_3 \leqslant N$. 使

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

---

* 1959年3月19日收到.

1) $\zeta(s, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}$, $\sigma > 1$. 以下c的定义皆同.

2) 能表成两素数之和者称 Goldfach 数.

I. 定理 1 的証明

設 $c_1, c_2, \cdots$ 表正数，δ 表任意小的正数，$\lambda = \dfrac{1-\delta}{2+4c}$，$U = N^{\frac{3-\lambda}{3-2\delta}}$. 令

$$Q(N, U) = \sum_{\substack{N=p_1+p_2+p_3 \\ \frac{N}{3}-U<p_i\leqslant\frac{N}{3}+U}} \log p_1 \log p_2 \log p_3, \tag{1}$$

$$J(N, U) = \int_0^1 \Psi^3(N, U, \Theta) e^{-2\pi i\Theta N}\, d\Theta, \tag{2}$$

其中

$$\Psi(N, U, \Theta) = \sum_{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U} \Lambda(n) e^{2\pi i n\Theta}, \tag{3}$$

由于

$$\Psi(N, U, \Theta) = \sum_{\frac{N}{3}-U<p\leqslant\frac{N}{3}+U} \log p e^{2\pi i p\Theta} + O(UN^{-\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

故得

$$Q(N, U) = J(N, U) + O(U^2 N^{-\frac{1}{2}+\epsilon}). \tag{4}$$

因此主要是研究(2)式的积分，現取

$$\tau = N^{\frac{3-2\lambda-(1-\lambda)\delta}{3-2\delta}},$$

則在(0,1)内任一实数皆可表成

$$\Theta = \frac{a}{q} + \alpha, \quad (a, q) = 1, \quad |\alpha| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad q \leqslant \tau.$$

現将 (0, 1) 区間分成 $\mathfrak{M}_1$ 与 $\mathfrak{M}_2$，凡是对应 $q \leqslant \log^{15} N$ 的 Θ 构成 $\mathfrak{M}_1$，余下的构成 $\mathfrak{M}_2$. $\mathfrak{M}_1$ 称作基本区間，$\mathfrak{M}_2$ 称作余区間. 将 $\mathfrak{M}_2$ 再用下法分成 $\mathfrak{M}_2'$ 与 $\mathfrak{M}_2''$. 凡对应 $\log^{15} N < q \leqslant$ $\leqslant e^{\log\log^8 N}$ 的 Θ 构成 $\mathfrak{M}_2'$，在 $\mathfrak{M}_2$ 中除去 $\mathfrak{M}_2'$ 即构成 $\mathfrak{M}_2''$. 这样在 $\mathfrak{M}_2$ 上的(3)式的估計就分成两部分，我們是用分析方法来处理 $\mathfrak{M}_2'$，用 Виноградов 方法来处理 $\mathfrak{M}_2''$.

§ 1. 在本节中我們先研究在 $\mathfrak{M}_1$ 上的积分. 显有

$$\int_0^1 \Psi^3(N, U, \Theta) e^{-2\pi i N\Theta} d\Theta = \left(\int_{\mathfrak{M}_1} + \int_{\mathfrak{M}_2}\right) \Psi^3(N, U, \Theta) e^{-2\pi i N\Theta}\, d\Theta,$$

$$\int_{\mathfrak{M}_1} \Psi^3(N, U, \Theta) e^{2\pi i N\Theta}\, d\Theta = \sum_{q\leqslant\log^{15}N} \sum_{(a,q)=1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \Psi^3(N, U, \Theta) e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha.$$

所以現在主要的問題是要求 $\Psi(N, U, \Theta)$ 在 $\mathfrak{M}_1$ 上的漸近公式，我們要用到下面的几个引理.

引理 1.1[3]. 令 $\psi(x, q, l) = \sum\limits_{\substack{n\leqslant x \\ n\equiv l \pmod q}} \Lambda(n)$，則当 $q \leqslant e^{\log\log^3 x}$ 时有

$$\psi(x, q, l) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)} \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \frac{S_x}{\varphi(q)} + O\left(\frac{x}{T} \log^2 x + \frac{x^{\frac{1}{2}} \log x}{\varphi(q)}\right).$$

其中$S_x=\sum\limits_{\chi}\tilde{\chi}(l)\sum\limits_{|\tau|\leq T}\frac{x^{\rho}}{\rho}$,这里 $\rho=\beta+i\tau$ 为 $L(s,\chi)$ 在 $0\leqslant\beta\leqslant1$ 内的零点. $\tilde{\chi}$ 为例外特征, $\tilde{\beta}$ 为 $L(s,\tilde{\chi})$ 的例外零点[4], T 为大于 3 的正数.

引理 1.2. 若 $q\leqslant e^{\log\log^3 x}$, $T=x^{\lambda}$, 則

$$\sum_{\chi}\sum_{|\tau|\leq T}{}' x^{\beta-1}=O(e^{-c_1\log^{\frac{1}{5}}x}).$$

其中“ ′ ”为除去例外零点.

証.
$$\sum_{\chi}\sum_{|\tau|\leq T}{}' x^{\beta-1}=\sum_{\chi}\sum_{|\tau|\leq T}{}'\left(x^{-1}+\int_0^{\beta}x^{\sigma-1}\log x\,d\sigma\right)=$$
$$=x^{-1}\sum_{\chi}\sum_{|\tau|\leq T}{}' 1+\int_0^1\left(\sum_{\chi}\sum_{|\tau|\leq T}{}' 1\right)x^{\sigma-1}\log x\,d\sigma\leqslant$$
$$\leqslant x^{-1}N(\sigma,T)+\int_0^1 N(\sigma,T)x^{\sigma-1}\log x\,d\sigma. \tag{5}$$

这里 $N(\sigma,T)$ 为所有属于模 q 的 L-函数在 $\beta\geqslant\sigma$, $|\tau|\leqslant T$ 內的零点的个数，且有 $N(\sigma,T)\leqslant\{q^4T^{4c}(T+q)^2\}^{1-\sigma}\log^8 qT$[5]. 但我們知道所有的 $L(s,\chi)$ 除去 $\tilde{\beta}$ 外皆有 β[6] $<1-\frac{c_2}{\log^{\frac{4}{5}}(|\tau|+3)+\log q}$, 故由(5)式得

$$\sum_{\chi}\sum_{|\tau|\leq T}x^{\beta-1}=O(x^{-1}qT\log qT)+O\{(q^4T^{4c}(T+q)^2x^{-1})^{c_3\log^{-\frac{4}{5}}T}\}=$$
$$=O(e^{-c_1\log^{\frac{1}{5}}x})+O(e^{-c_1\log^{\frac{1}{5}}x})=O(e^{-c_1\log^{\frac{1}{5}}x}).$$

这里用到了 $T=x^{\lambda}$, 引理証毕.

引理 1.3. (Siegel). 設 ε 为任意小之正数,則有

$$\tilde{\beta}<1-\frac{c_3(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}.$$

引理 1.4. 下式成立

$$\Psi^3(N,U,\Theta)=\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\frac{e^{2\pi iN\alpha}}{\pi^3\alpha^3}\sin^3 2U\alpha+O\{\min(|\alpha|^{-3}e^{-c_4\log^{\frac{1}{5}}N},\ U^3e^{-c_4\log^{\frac{1}{5}}N})\}.$$

証.

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leq\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)e^{2\pi iN\Theta}=\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leq\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)}=$$
$$=\sum_{(l,q)=1}e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\sum_{\substack{\frac{N}{3}-U<n\leq\frac{N}{3}+U\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,q)}}\Lambda(n)e^{2\pi in\alpha}+O(\log^3 q). \tag{6}$$

而

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leq\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)e^{2\pi in\alpha}=\psi\left(\frac{N}{3}+U,l,q\right)e^{2\pi i\alpha\left(\frac{N}{3}+U\right)}-$$
$$-\psi\left(\frac{N}{3}-U,l,q\right)e^{2\pi i\alpha\left(\frac{N}{3}-U\right)}-\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}\psi(x,l,q)\,d(e^{2\pi i\alpha x}).$$

利用引理 1.1 得

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)\,e^{2\pi i n\alpha}=\left\{\frac{\frac{N}{3}+U}{\varphi(q)}-\frac{\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\frac{\left(\frac{N}{3}+U\right)^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}-\frac{S_{\frac{N}{3}+U}}{\varphi(q)}+O\left(\frac{N}{T}\log^2 N\right)\right\}\times$$

$$\times e^{2\pi i\alpha\left(\frac{N}{3}+U\right)}-\left\{\frac{\frac{N}{3}-U}{\varphi(q)}-\frac{\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\frac{\left(\frac{N}{3}-U\right)^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}-\frac{S_{\frac{N}{3}-U}}{\varphi(q)}+O\left(\frac{N}{T}\log^2 N\right)\right\}\times$$

$$\times e^{2\pi i\alpha\left(\frac{N}{3}-U\right)}-\left\{\frac{x}{\varphi(q)}-\frac{\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}-\frac{S_x}{\varphi(q)}\right\}e^{2\pi i\alpha x}\Big|_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}+$$

$$+\frac{1}{\varphi(q)}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}e^{2\pi i\alpha t}\,dt+\frac{\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}t^{\tilde{\beta}-1}e^{2\pi i\alpha t}\,dt+$$

$$+\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)\sum_{|\tau|\leqslant T}{}'\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}t^{\rho-1}e^{2\pi i\alpha t}\,dt+O\left(\frac{NU|\alpha|\log^2 N}{T}\right).\tag{7}$$

由引理 1.3 得 $\tilde{\beta}-1>-\dfrac{1}{\log^{\frac{4}{5}}N}$, 当 $q\leqslant\log^{15}N$ 时,将(7)化簡得(利用引理 1.2)

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)\,e^{2\pi i n\alpha}=\frac{1}{\varphi(q)}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}e^{2\pi i\alpha t}\,dt+O\left(\frac{NU|\alpha|}{T}\log^2 N\right)+$$

$$+O\left\{\min\left(|\alpha|^{-1}e^{-c_5\log^{\frac{1}{5}}N},\,Ue^{-c_5\log^{\frac{1}{5}}N}\right)\right\}+O\left(\frac{N}{T}\log^2 N\right).\tag{8}$$

故由(6),(8)得

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)\,e^{2\pi i n\Theta}=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}e^{2\pi i\alpha t}\,dt+O\left(\frac{NU|\alpha|\log^{17}N}{T}\right)+$$

$$+O\left(\frac{N}{T}\log^{17}N\right)+O\left\{\min\left(|\alpha|^{-1}e^{-c_6\log^{\frac{1}{5}}N},\,Ue^{-c_6\log^{\frac{1}{5}}N}\right)\right\}.\tag{9}$$

由于 $|\alpha|\leqslant\dfrac{1}{q\tau}$, 及 T, U, τ 的选取得

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)\,e^{2\pi i n\Theta}=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}e^{2\pi i\alpha t}\,dt+O\left\{\min\left(|\alpha|^{-1}e^{-c_6\log^{\frac{1}{5}}N},\,Ue^{-c_6\log^{\frac{1}{5}}N}\right)\right\}.\tag{10}$$

由(10)式得

$$\Psi^3(N,U,\Theta)=\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\frac{e^{2\pi i N\alpha}}{\pi^3\alpha^3}\sin^3 2U\alpha+O\left\{\min\left(|\alpha|^{-3}e^{-c_4\log^{\frac{1}{5}}N},\,U^3e^{-c_4\log^{\frac{1}{5}}N}\right)\right\}.$$

引理得証.

由引理 1.4 得

$$\sum_{q\leqslant\log^{15}N}\sum_{(a,q)=1}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\int_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{q\tau}}\Psi^3\left(N,U,\frac{a}{q}+\alpha\right)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha=$$

$$=\sum_{q\leqslant\log^{15}N}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{(a,q)=1}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\int_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{q\tau}}\frac{\sin^3 2U\alpha}{\pi^3\alpha^3}d\alpha+$$

$$+O\left(\int_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{U}}U^3e^{-c_7\log^{\frac{1}{5}}N}d\alpha\right)+O\left(\int_{\frac{1}{U}<|\alpha|\leqslant\frac{1}{q\tau}}|\alpha|^{-3}e^{-c_7\log^{\frac{1}{5}}N}d\alpha\right)=$$

$$=c_8U^2+O(U^2\log^{-14}N).\tag{11}$$

(这是由于 (1) $\displaystyle\int_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{q\tau}}\frac{\sin^3 2U\alpha}{\alpha^3}d\alpha=4U^2\int_{|\alpha|\leqslant\frac{2U}{q\tau}}\frac{\sin^3\alpha}{\alpha^3}d\alpha=$

$$=4U^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3\alpha}{\alpha^3}d\alpha+O\left(U^2\int_{|\alpha|\geqslant\frac{2U}{q\tau}}\alpha^{-3}d\alpha\right)=$$

$$=c_{10}U^2+O(U^2e^{-c_9\log^{\frac{1}{5}}N}).$$

(2) $\displaystyle\sum_{q\leqslant\log^{15}N}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{(a,q)=1}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}=c_{11}^*+O(\log^{-14}N)$).

§ 2. 本节要研究在 $\mathfrak{M}_2$ 上的估計

引理 2.1. 若 $\Theta\in\mathfrak{M}_2'$,則有 $\Psi(N,U,\Theta)=O(U\log^{-4}N)$.

証. 由(7)式及引理 1.2 得

$$\sum_{\substack{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U\\ n\equiv l(q)}}\Lambda(n)e^{2\pi in\alpha}=\frac{1}{\varphi(q)}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}e^{2\pi i\alpha t}dt+O\left(\frac{NU|\alpha|}{T}\log^2N\right)+$$

$$+\frac{\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}t^{\tilde{\beta}-1}e^{2\pi i\alpha t}dt+O(Ue^{-c_{12}\log^{\frac{1}{5}}N}).\tag{12}$$

由(12)及(6)得

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)e^{2\pi in\Theta}=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}e^{2\pi i\alpha t}dt+O\left(\frac{NU|\alpha|}{T}e^{c_{13}\log\log^3N}\right)+$$

$$+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(l,q)=1}\tilde{\chi}(l)e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}t^{\tilde{\beta}-1}e^{2\pi i\alpha t}dt+O(Ue^{-c_{14}\log^{\frac{1}{5}}N}).\tag{13}$$

由 U,τ,T 的选取及 $q>\log^{15}N$,故由(13)得当 $\Theta\in\mathfrak{M}_2'$ 时有

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n<\frac{N}{3}+U}\Lambda(n)e^{2\pi in\Theta}=O(U\log^{-4}N)^{1)}.$$

引理証毕.

---

* 因 $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{(a,q)=1}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}=c_{11}>0$ (对任意奇数 N).

1) 这里我們用到了 $\displaystyle\sum_{(l,q)=1}\tilde{\chi}(l)e^{2\pi i\frac{a}{q}l}=O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

引理 2.2. 令

$$S(N, U, \Theta) = \sum_{\frac{N}{3}-U<p\leqslant\frac{N}{3}+U} e^{2\pi i\Theta p},$$

則有

$$\Psi(N, U, \Theta) = \log\left(\frac{N}{3}+U\right)S(N, U, \Theta) + O(U\log^{-3}N).$$

証. 令

$$S(x, \Theta) = \sum_{p\leqslant x} e^{2\pi i\Theta p}.$$

則显有

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<p\leqslant\frac{N}{3}+U} \log p e^{2\pi ip\Theta} = S\left(\frac{N}{3}+U, \Theta\right)\log\left(\frac{N}{3}+U\right) - S\left(\frac{N}{3}-U, \Theta\right)\log\left(\frac{N}{3}-U\right) -$$

$$-\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}\frac{S(t, \Theta)}{t}dt = S\left(\frac{N}{3}+U, \Theta\right)\log\left(\frac{N}{3}+U\right) - S\left(\frac{N}{3}-U, \Theta\right)\log\left(\frac{N}{3}+U\right) +$$

$$+ S\left(\frac{N}{3}-U, \Theta\right)\left(\log\left(\frac{N}{3}+U\right) - \log\left(\frac{N}{3}-U\right)\right) - \int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}\frac{S(t, \Theta)}{t}dt =$$

$$= S(N, U, \Theta)\log\left(\frac{N}{3}+U\right) + S\left(\frac{N}{3}-U, \Theta\right)\log\left(1+\frac{2U}{\frac{N}{3}-U}\right) -$$

$$-\int_{\frac{N}{3}-U}^{\frac{N}{3}+U}\frac{S(t, \Theta)}{t}dt = S(N, U, \Theta)\log\left(\frac{N}{3}+U\right) + O(U\log^{-3}N)^{[7]}. \tag{14}$$

另一方面因

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U} \Lambda(n)e^{2\pi in\Theta} = \sum_{\frac{N}{3}-U<p\leqslant\frac{N}{3}+U} \log p\, e^{2\pi ip\Theta} + O(UN^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \tag{15}$$

故由(14),(15)得

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<n\leqslant\frac{N}{3}+U} \Lambda(n)e^{2\pi in\Theta} = S(N, U, \Theta)\log\left(\frac{N}{3}+U\right) + O(U\log^{-3}N). \tag{16}$$

引理得証.

引理 2.3. (И. М. Виноградов)[8] 設 h 为任意正数,

$$h\leqslant\frac{1}{6},\quad r=\log N,\quad \Theta=\frac{a}{q}+\alpha,\quad |\alpha|\leqslant\frac{1}{q^2},\quad 0<q\leqslant N,\quad (a, q)=1,$$

并令

$$S = \sum_{N-A<p\leqslant N} e^{2\pi i\Theta p},\quad \lambda = 1+h,$$

則有

$$S = O\left(Ar^{\frac{\log r}{\log\lambda}+6}\sqrt{\frac{N^{\frac{2+h}{3}}}{A}+\frac{Nq}{A^2}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}}\right).$$

引理 2.4. 若 $\Theta \in \mathfrak{M}_2''$ 則有 $\Psi(N, U, \Theta) = O(U \log^{-3} N)$.

証. 由引理 2.3 得

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<p\leq\frac{N}{3}+U} e^{2\pi i\Theta p} = O\left\{Ue^{c_{15}\log\log^2 N}\left(\sqrt{N^{\frac{2+h}{3}}\cdot U^{-1}} + \sqrt{\frac{N\tau}{U^2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}.$$

現取 $h = \delta$ (充分小), 則由 U, τ 的选取及 $q > e^{\log\log^2 N}$ 得

$$\sum_{\frac{N}{3}-U<p\leq\frac{N}{3}+U} e^{2\pi i\Theta p} = O(U\log^{-4} N). \tag{17}$$

由引理 2.2 及(17)即得 $\Psi(N, U, \Theta) = O(U\log^{-3} N)$, 当 $\Theta \in \mathfrak{M}_2''$.

由引理 2.1 及 2.3 得 $\Psi(N, U, \Theta) = O(U\log^{-3} N)$ 当 $\Theta \in \mathfrak{M}_2$. (18)

§ 3. 定理 1 的証明 $\int_0^1 \Psi^3(N,U,\Theta)e^{-2\pi i\Theta N}\,d\Theta = \left(\int_{\mathfrak{M}_1} + \int_{\mathfrak{M}_2}\right)\Psi^3(N,U,\Theta)\,e^{-2\pi i\Theta N}\,d\Theta.$

由(11)及(18)得

$$\int_0^1 \Psi^3(N,U,\Theta)e^{-2\pi i\Theta N}\,d\Theta = C_8 U^2 + O(U^2\log^{-3} N) +$$

$$+O\left(|\Psi(N,U,\Theta)|_{\Theta\in\mathfrak{M}_2}\int_0^1 |\Psi(N,U,\Theta)|^2 d\Theta\right) = C_8U^2 + O(U^2\log^{-2} N),$$

由(4)式定理得証.

II. 定 理 2 的 証 明

本定理証明的方法是在处理基本区間时用了 Линник 的分析方法及上定理所用的关于零点分布的定理

令

$$S(N,\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi in\Theta} \Lambda(n), \tag{1}$$

$$T(v,\Theta) = \sum_{n\leq v} e^{-2\pi i\Theta n} \Lambda(n), \tag{2}$$

其中 Θ 为实数, $v = N^{\frac{2C}{1+2C}+\varepsilon}$. 再令

$$Q(N,v) = \sum_{p\leq v} \log p \sum_{N-p=p_1+p_2} \log p_1 \log p_2, \tag{3}$$

$$J(N,v) = \int_0^1 T(v,\Theta)S^2(N,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}\,d\Theta; \tag{4}$$

同样对每一 $\Theta \in (0,1)$ 必能写成

$$\Theta = \frac{a}{q} + \alpha, \quad (a,q) = 1, \quad |\alpha| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad q \leq \tau, \quad \tau = v\log^{-3} N.$$

对应 $q \leq e^{\frac{1}{\log 10N}}$ 的 Θ 构成 $\mathfrak{W}_1$, 余下的构成 $\mathfrak{M}_2$, 故 $J(N,v)$ 可写成

$$J(N,v) = J_0(N,v) + J_1(N,v);$$

这里

$$J_0(N,v)=\int_{\mathfrak{M}_1} T(v,\Theta)S^2(N,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}\,d\Theta,$$

$$J_1(N,v)=\int_{\mathfrak{M}_2} T(v,\Theta)S^2(N,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}\,d\Theta.$$

§1. 现在先来研究 $\mathfrak{M}_1$ 上的积分. 为简单起令 $S(N,\Theta)=S(\Theta)$, 显有

$$\int_{\mathfrak{M}_1} T(v,\Theta)S^2(N,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}\,d\Theta=\sum_{n\leqslant v}\Lambda(n)\int_{\mathfrak{M}_1}S^2(\Theta)e^{2\pi iN_1\Theta}\,d\Theta=$$

$$=\sum_{n\leqslant v}\sum_{q\leqslant Q_1}\sum_{(a,q)=1}\Lambda(n)\int_{-\Delta}^{\Delta}S^2\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)e^{2\pi iN_1\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)}d\alpha=$$

$$=\sum_{n\leqslant v}\Lambda(n)\sum_{q\leqslant Q_1}\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi iN_1\frac{a}{q}}\int_{-\Delta}^{\Delta}S^2\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)e^{2\pi iN_1\alpha}\,d\alpha, \tag{5}$$

这里 $N_1=N-n$, $Q_1=e^{\log\frac{1}{10}N}$. 令

$$I_q(N_1)=\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi iN_1\frac{a}{q}}\int_{-\Delta}^{\Delta}S^2\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)e^{2\pi iN_1\alpha}\,d\alpha. \tag{6}$$

则由(5),(6)得

$$\int_{\mathfrak{M}_1}=\sum_{n\leqslant v}\Lambda(n)\sum_{\substack{q=1\\ q\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\tilde q)}}^{Q_1}I_q(N_1)+\sum_{n\leqslant v}\Lambda(n)\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\tilde q)}}^{Q_1}I_q(N_1), \tag{7}$$

这里 $\tilde q$ 为例外模.

現分两种情况来考虑. 1) $\tilde q>\log^{15}N$. 2) $\tilde q\leqslant\log^{15}N$ 若 1)成立,则利用 Виноградов 定理得

$$\sum_{n\leqslant v}\Lambda(n)\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\tilde q)}}^{Q_1}I_q(N_1)=O\left(\max_{q>\log^{15}N}|T(v,\Theta)|\int_0^1|S(N,\Theta)|^2d\Theta\right)=$$

$$=O(Nv\log^{-2}N), \tag{8}$$

故只要考虑和

$$\sum_{n\leqslant v}\Lambda(n)\sum_{\substack{q\leqslant Q_1\\ q\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\tilde q)}}I_q(N_1)$$

就行了. 我們要用到下面的引理.

引理 1.1.[9] 設 $1\leqslant q\leqslant Q_1$, $q\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\tilde q)$, 则一定存在 $\mu>0$ 使 $L(s,\chi)$ 在区域

$$\sigma>1-\frac{\mu}{\log^{\frac{4}{5}}N},\qquad |t|\leqslant N$$

內不为 0.

現来研究 $I_q(N_1)$. 令

$$A_\chi(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)e^{-\frac{n}{N}}e^{-2\pi i\alpha n}.\qquad \tau_\chi=\sum_{(l,q)=1}\bar\chi(l)e^{2\pi i\frac{al}{q}}.$$

则得

$$S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\tau_\chi A_\chi(\alpha)+O(\log^3N). \tag{9}$$

故有

$$I_q(N_1)=\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,q)=1}\sum_{x_1}\sum_{x_2}\tau_{x_1}\tau_{x_2}e^{2\pi i\frac{N_1a}{q}}\int_{-\Delta}^{\Delta}A_{x_1}(\alpha)A_{x_2}(\alpha)e^{2\pi iN_1\alpha}d\alpha+O(N^{0.9}).$$

再令

$$I_q^{(0)}(N_1)=\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{N_1a}{q}}\int_{-\Delta}^{\Delta}A_{x_0}^2(\alpha)e^{2\pi iN_1\alpha}d\alpha.$$

$$I_q^{(1)}(N_1)=2\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{N_1a}{q}}\sum_{x}{}'\tau_x\int_{-\Delta}^{\Delta}A_x(\alpha)A_{x_0}(\alpha)e^{2\pi iN_1\alpha}d\alpha.$$

$$I_q^{(2)}(N_1)=\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{N_1a}{q}}\sum_{x_1}\sum_{x_2}{}'\tau_{x_1}\tau_{x_2}\int_{-\Delta}^{\Delta}A_{x_1}(\alpha)A_{x_2}(\alpha)e^{2\pi iN_1\alpha}d\alpha,$$

这里“ ′ ”表示 $x\neq x_0$，由此有

$$I_q(N_1)=I_q^{(0)}(N_1)+I_q^{(1)}(N_1)+I_q^{(2)}(N_1)+O(N^{0.9}).\tag{11}$$

§ **2.** 我們先估計 $I_q^{(2)}(N_1)$：

$$|I_q^{(2)}(N_1)|\leqslant\frac{1}{\varphi^2(q)}\int_{-\Delta}^{\Delta}\sum_{(a,q)=1}\Big|\sum_{x_1}\sum_{x_2}{}'\tau_{x_1}\tau_{x_2}A_{x_1}(\alpha)A_{x_2}(\alpha)\Big|d\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varphi^2(q)}\int_{-\Delta}^{\Delta}\sum_{(a,q)=1}\Big|\sum_{x}{}'\tau_xA_x(\alpha)\Big|^2d\alpha\leqslant\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{x}{}'|\tau_x|^2\int_{-\Delta}^{\Delta}|A_x(\alpha)||A_{\bar{x}}(\alpha)|d\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{x}{}'\int_{-\Delta}^{\Delta}|A_x(\alpha)||A_{\bar{x}}(\alpha)|d\alpha,$$

但由于

$$|A_x(\alpha)||A_{\bar{x}}(\alpha)|\leqslant\frac{|A_x(\alpha)|^2+|A_{\bar{x}}(\alpha)|^2}{2},$$

所以得

$$I_q^{(2)}(N_1)\leqslant\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{x}{}'\int_{-\Delta}^{\Delta}|A_x(\alpha)|^2d\alpha\leqslant\frac{2q}{\varphi(q)}\sum_{x}{}'\int_{0}^{\Delta}|A_x(\alpha)|^2d\alpha.\tag{12}$$

令 $x=\frac{1}{N}+2\pi i\alpha$，則由[10]得

$$A_x(\alpha)=-\sum_{\rho}x^{-\rho}\Gamma(\rho)+O(\log^3N),\quad x\neq x_0.$$

这里 ρ 經过 $L(s,x)$ 在 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 內的全部零点，以 $\mathfrak{S}_\beta$ 表示横坐标在 β 与 $\beta+\frac{1}{\log^2N}$ 之間的带形区域，并令

$$A_{x\beta}=-\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_\beta}x^{-\rho}\Gamma(\rho),$$

則得

$$|I_q^{(2)}(N_1)|\leqslant2q\log^4N\sum_{\beta}\int_0^{\Delta}|A_{x\beta}(\alpha)|^2d\alpha+O(|\Delta|\log^6N).\tag{13}$$

所以現在主要的問題是来估計积分

$$\int_0^{\Delta}|A_{x\beta}(\alpha)|^2d\alpha.$$

我們有

$$x^{-\rho}\Gamma(\rho)=|x|^{-\rho}\Gamma(\rho)e^{\frac{\pi}{2}t-t\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}}e^{-i\beta\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}\right)},$$

因 $\Gamma(\rho)=O\left((|t|+1)^{\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right)$,故有

$$|x^{-\rho}\Gamma(\rho)|\leqslant(\sqrt{N^{-2}+4\pi^2\alpha^2})^{-\beta}(|t|+1)^{\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}(|t|-t)}e^{-t\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}},$$

若 $0<\alpha\leqslant\frac{4}{N}$, 則有

$$\mathrm{arctg}^{-1}\frac{1}{8\pi}\leqslant\mathrm{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故有

$$x^{-\rho}\Gamma(\rho)=O(N^{\beta}(|t|+1)^{\beta-\frac{1}{2}}e^{-a_0|t|},\quad\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{8\pi}<a_0\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_\beta}x^{-\rho}\Gamma(\rho)=O(N^{\beta}\sum_{|t|\leqslant\log^2N}(|t|+1)^{\beta-\frac{1}{2}}e^{-a_0|t'|}+O(1))=O(N^{\beta}\log N).$$

由此得

$$\int_0^{\frac{4}{N}}|A_{x\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=O(N^{2\beta-1}\log^2N).\tag{14}$$

故

$$\int_0^{\Delta}|A_{x\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=\int_0^{\frac{4}{N}}|A_{x\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha+\int_{\frac{4}{N}}^{\Delta}|A_{x\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=$$

$$=O(N^{2\beta-1}\log^2N)+\int_{\frac{4}{N}}^{\Delta}|A_{x\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha.$$

現我們将 $\left(\frac{4}{N},\Delta\right)$ 分成形如 $\left(\frac{\Delta}{2^r},\frac{\Delta}{2^{r-1}}\right)$ 的子区間, Линник 証明了下面的引理.

引理 2.1. 設 $Q(T,\beta,x)$ 表示 $L(s,x)$ 在 $\sigma\geqslant\beta$, $|t|\leqslant T$ 內的零点数目,則有

$$\int_{\frac{\Delta}{2^r}}^{\frac{\Delta}{2^{r-1}}}|A_{x\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=O\left(N^{2\beta-1}\log^2N\sum_{s=0}^{\infty}Q\left(\frac{2\pi N\Delta}{2^r}\cdot2^{s+1},\beta,x\right)e^{-2^{s-2}}\right).$$

由引理 1 得

$$\int_{\frac{\Delta}{2^r}}^{\frac{\Delta}{2^{r-1}}}|A_{x\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=O\left(N^{2\beta-1}\log^2N\sum_{2^s\leqslant4\log^3N}Q\left(\frac{2\pi N\Delta}{2^r}\cdot2^{s+1},\beta,x\right)e^{-2^{s-2}}+O(1)=\right.$$

$$=O(N^{2\beta-1}\log^3NQ(M,\beta,x))+O(1).$$

其中

$$M=16\pi N\Delta\log^2N.\tag{15}$$

但我們有

$$Q(M,\beta,x)=O(M^{(2+4c)(1-\beta)}q^{4(1-\beta)}).\tag{16}$$

将(16)代入(15)得

$$\int_{\frac{\Delta}{2^r}}^{\frac{\Delta}{2^{r-1}}} |A_{x\beta}(\alpha)|^2 d\alpha = O(N^{2\beta-1} \log^3 N M^{(2+4c)(1-\beta)} q^{4(1-\beta)}) =$$

$$= O(N^{2\beta-1} e^{4\log^{\frac{1}{10}} N} (N\Delta)^{(2+4c)(1-\beta)}) = O(N e^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{5}} N}). \quad (17)$$

这是由于$\Delta \leqslant \frac{1}{q\tau}$，及$\tau = N^{\frac{2c}{1+2c}+\varepsilon}$[1]．再由引理 1.1 卽得上式．故

$$\int_{\frac{N}{4}}^{\Delta} |A_{x\beta}(\alpha)|^2 d\alpha = O(N \log N e^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{5}} N}) = O(N e^{-\frac{\varepsilon}{2} \log^{\frac{1}{5}} N}). \quad (18)$$

由(13)得

$$I_q^{(2)}(N_1) = O(N e^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{5}} N}). \quad (19)$$

§ 3. 現在来估計 $I_q^{(1)}(N_1)$．显有

$$|I_q^{(1)}(N_1)| \leqslant \frac{2q}{\varphi^2(q)} \sum_x{}' \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{x0}(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_x(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

由于

$$A_{x0}(\alpha) = \frac{1}{x} - \sum_{\rho} x^{-\rho} \Gamma(\rho) + O(\log^3 N). \quad (21)$$

故得

$$\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{x0}(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{d\alpha}{4\pi^2\alpha^2 + N^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} + O(1).$$

这里

$$A(\alpha) = -\sum_{\rho} x^{-\rho} \Gamma(\rho).$$

由上节討論知

$$\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A(\alpha)|^2 d\alpha\right) = O\left(N e^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{5}} N}\right),$$

故

$$\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{x0}(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} = O(N^{\frac{1}{2}}).$$

由(20)得

$$I_q^{(1)}(N_1) = O(N e^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{5}} N}). \quad (22)$$

我們来計算

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} A_{x_0}^2(\alpha) e^{2\pi i \alpha N_1} d\alpha.$$

由(21)得

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} A_{x0}^2(\alpha) e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{e^{2\pi i \alpha N_1}}{\left(\frac{1}{N} + 2\pi i \alpha\right)^2} d\alpha + O\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{|A(\alpha)|}{|x|} d\alpha\right) +$$

$$+ O\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A(\alpha)|^2 d\alpha\right) + O\left(\log^3 N \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{d\alpha}{|x|}\right) + O\left(\log^3 N \int_{-\Delta}^{\Delta} |A(\alpha)| d\alpha\right) +$$

$$+ O(1). \quad (23)$$

---

1) 这里我們以 ε 表任意小之正数而不可以分別．

利用 Schwary 不等式即可証明

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} A_{x0}^2(\alpha)e^{2\pi i N_1 \alpha}\,d\alpha = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{e^{2\pi i N_1 \alpha}}{\left(\frac{1}{N}+2\pi i\alpha\right)^2}\,d\alpha + O\left(Ne^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{3}} N}\right). \quad (24)$$

而

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{e^{2\pi i N_1 \alpha}}{\left(\frac{1}{N}+2\pi i\alpha\right)^2}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i N_1 \alpha}}{\left(\frac{1}{N}+2\pi i\alpha\right)^2}\,d\alpha + O\left(Ne^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{3}} N}\right) =$$

$$= N_1 e^{-\frac{N_1}{N}} + O(Ne^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{5}} N}). \quad (25)$$

以(25)代入(24)得

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} A_{x0}^2(\alpha)e^{2\pi i N_1 \alpha}\,d\alpha = N_1 e^{-\frac{N_1}{N}} + O\left(Ne^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{3}} N}\right). \quad (26)$$

所以

$$I_q^{(0)}(N_1) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i \frac{a}{q} N_1} \cdot N_1 e^{-\frac{N_1}{N}} + O\left(Ne^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{3}} N}\right). \quad (27)$$

§ **4.** 由上面三节的討論得到当 $\tilde{q} > \log^{15} N$ 时有

$$I_q(N_1) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i \frac{a}{q} N_1} \cdot N_1 e^{-\frac{N_1}{N}} + O\left(Ne^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{3}} N}\right). \quad (28)$$

由(8)及(28)得

$$\sum_{n \leqslant v} \Lambda(n) \sum_{\substack{q \leqslant Q_1 \\ q \not\equiv 0 \pmod{\tilde{q}}}} I_q(N_1) = \sum_{n \leqslant v} \Lambda(n) \sum_{\substack{q \leqslant Q_1 \\ q \not\equiv 0 \pmod{\tilde{q}}}} N_1 A_q(N_1) e^{-\frac{N_1}{N}} + O\left(Nve^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{3}} N}\right), \quad (29)$$

这里

$$A_q(N_1) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i \frac{a}{q} N_1}.$$

由于 $N_1 = N - n$. 而 $n \leqslant v$. 故 $e^{-\frac{N_1}{N}} = e^{-1} + O(N^{-\varepsilon})$. 故有

$$\sum_{n \leqslant v} \Lambda(n) \sum_{\substack{q \leqslant Q_1 \\ q \not\equiv 0 \pmod{\tilde{q}}}} N_1 A_q(N_1) e^{-\frac{N_1}{N}} = e^{-1} \sum_{n \leqslant v} (N-n)\Lambda(n) \sum_{\substack{q \leqslant Q_1 \\ q \not\equiv 0 \pmod{\tilde{q}}}} A_q(N_1) +$$

$$+ O(N^{1-\varepsilon} v). \quad (30)$$

但

$$\sum_{\substack{q \leqslant Q_1 \\ q \not\equiv 0 \pmod{\tilde{q}}}} A_q(N_1) = \sum_{q \leqslant Q_1} A_q(N_1) - \sum_{\substack{q \leqslant Q_1 \\ q \equiv 0 \pmod{\tilde{q}}}} A_q(N_1).$$

而

$$\sum_{\substack{q \leqslant Q_1 \\ q \equiv 0 \pmod{\tilde{q}}}} A_q(N_1) = O\left(\sum_{\substack{q \equiv 0 \pmod{\tilde{q}} \\ q \leqslant Q_1}} \frac{1}{\varphi(q)}\right) = O\left(\log N \sum_{\substack{q \leqslant Q_1 \\ q \equiv 0 \pmod{\tilde{q}}}} \frac{1}{q}\right) =$$

$$= O(\log N \tilde{q}^{-1} \cdot \log Q_1) = O(\log^{-10} N). \quad (31)$$

由(30),(31)得到

$$e^{-1}\sum_{n\leqslant v}\Lambda(n)\sum_{\substack{q\leqslant Q_1\\ q\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \tilde q)}}N_1A_q(N_1)=e^{-1}\sum_{n\leqslant v}(N-n)\Lambda(n)\sum_{q\leqslant Q_1}A_q(N_1)+O(Nv\log^{-2}N). \tag{32}$$

由(7),(8)及(32)得

$$\int_{\mathfrak{M}_1}T(v,\Theta)S^2(N,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}d\Theta=e^{-1}\sum_{n\leqslant v}(N-n)\Lambda(n)\sum_{q\leqslant Q_1}A_q(N_1)+ + O(Nv\log^{-2}N). \tag{33}$$

§ **5.** 若 $\tilde q\leqslant\log^{11}N$，則由 Siegel 定理得所有的 $L(s,\chi)$ (其模 $q\leqslant Q_1$)在区域

$$\sigma\geqslant 1-\frac{\mu}{\log^{4/5}N},\qquad |t|\leqslant N.$$

內不为 0. 这样上面的討論就不必分 $q\equiv 0(\mathrm{mod}\ \tilde q)$ 及 $q\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ \tilde q)$ 两种情形. 完全类似的可得(33).

§ **6.** 我們知道由 Виноградов 定理很易得

$$\int_{\mathfrak{M}_2}T(v,\Theta)S^2(N,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}d\Theta=O(Nv\log^{-2}N). \tag{34}$$

故由(33)及(34)得

$$e\int_0^1T(v,\Theta)S^2(N,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}d\Theta=\sum_{n\leqslant v}\Lambda(n)(N-n)\sum_{q\leqslant Q_1}A_q(N_1)+O(Nv\log^{-2}N). \tag{35}$$

但 А. И. Виноградов 証明了 $\sum_{q\leqslant Q_1}A_q(N_1)>c_0$[9]. 故

$$\int_0^1T(v,\Theta)S^2(N,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}d\Theta=c_1Nv+O(Nv\log^{-2}N). \tag{36}$$

至此定理証毕.

III. 定理 3 的証明

定理 3 証明的方法是将上面两定理的方法結合起来，确切地說在基本区間上是用定理 2 的方法,在余区間上是用定理 1 的方法. 本定理的証明完全类似于上两定理,故只敘述其大概步驟.

§ **1.** 令

$$v=N^{\frac{2}{3}+\varepsilon},\quad \tau=N^{\frac{2c}{1+2c}+\varepsilon},\quad \left(c=\frac{1}{6}\right)$$

$$S(v,\Theta)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n}{v}}e^{-2\pi in\Theta}\Lambda(n), \tag{1}$$

$$T(N,v,\Theta)=\sum_{N-v<n\leqslant N}\Lambda(n)e^{2\pi i\Theta n}, \tag{2}$$

$$J(N,v)=\int_0^1T(N,v,\Theta)S^2(v,\Theta)e^{2\pi iN\Theta}d\Theta. \tag{3}$$

同样对每一 Θ 可表成

$$\Theta=\frac{a}{q}+\alpha,\quad |\alpha|\leqslant\frac{1}{q\tau},\quad (a,q)=1,\quad q\leqslant\tau.$$

对应 $q \leqslant e^{\log^{\frac{1}{10}} N}$ 的 Θ 构成基本区間 $\mathfrak{M}_1$，余下的构成余区間 $\mathfrak{M}_2$. 則

$$J(N,v) = J_0(N,v) + J_1(N,v),$$

$$J_0(N,v) = \int_{\mathfrak{M}_1} T(v,N,\Theta) S^2(v,\Theta) e^{2\pi i N\Theta}\, d\Theta,$$

$$J_1(N,v) = \int_{\mathfrak{M}_2} T(v,N,\Theta) S^2(v,\Theta) e^{2\pi i N\Theta}\, d\Theta.$$

§ 2. 同样我們有

$$J_0(N,v) = \sum_{N-v<n\leqslant N} \Lambda(n) \sum_{q\leqslant Q_1} I_q(N_1),$$

这里

$$N_1 = N - n. \qquad I_q(N_1) = \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i N_1 \frac{a}{q}} \int_{-\Delta}^{\Delta} S(v,\Theta) e^{2\pi i N_1 \alpha}\, d\alpha.$$

只要注意到在 II. § 3 的証明中并沒有利用到 N_1 的特性，所以由(28)得

$$I_q(N_1) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i \frac{a}{q} N_1} N_1 e^{-\frac{N_1}{v}} + O\left(v e^{-\varepsilon \log^{\frac{1}{3}} N}\right).$$

故

$$J_0(N,v) = \sum_{N-v<n\leqslant N} (N-n)\Lambda(n) \sum_{q\leqslant Q_1} A_q(N_1) e^{-\frac{N-n}{v}} + O(v^2 \log^{-3} N).$$
$$> c_2 v^2. \tag{4}$$

§ 3. 现在来估計 $\mathfrak{M}_2$ 上的积分，由 I 引理 2.3 得到

$$\sum_{N-v<p\leqslant N} e^{2\pi i \Theta p} = O\left(v r^{\frac{\log r}{\log \lambda}+6} \sqrt{\frac{N^{\frac{2+h}{3}}}{v} + \frac{Nq}{v^2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}}\right).$$

现取 $h = \varepsilon$. 而 $q > e^{\log^{\frac{1}{10}} N}$，故得

$$\sum_{N-v<p\leqslant N} e^{2\pi i \Theta p} = O(v \log^{-4} N).$$

故有

$$T(v,N,\Theta) = O(v \log^{-3} N). \qquad \text{当 } \Theta \in \mathfrak{M}_2 \text{ 时}.$$

由此得

$$J_2(N,v) = O(v^2 \log^{-2} N). \tag{5}$$

由(4),(5)立即得

$$J(N,v) > c_3 v^2.$$

定理証毕.

参 考 文 献

[1] Haselgrove, C. B., Some theorem in the analytic theory numbers, *Joum. London Math. Soc.*, 26 (1951), 273—277.

[2] 閔嗣鶴: On the order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$. *Trans. Amer. Math Soc.*, 65 (1949), 448—472.

[3] Prachar, K., Primzahlverteilung.

[4] 潘承洞: 論算术級数中之最小素数. 北大学报 1958 年, 第 1 期.

[5] 参考 [3]
[6] Родосский, К. А., Исключительный нуль и Распределение простых чисел коротоких эрифметических прогрессиях. *Матем. сб.*, т. 36 (78): 2.
[7] Estermann, T., *Introduction to modern prime number theory.*
[8] Виноградов, И. М., *Избранные труды.* стр. 203.
[9] Виноградов, А. И., Об одоной «почти бинарной» задаче. *Изв. АН СССР*, т. 20(1956), № 6.
[10] Линник, Ю. В., Складывание простых чисел со степенями одного и того же числа. *Матем. Сборник*, т. 32 (74), 3—60 (1953).

SOME NEW RESULTS IN THE ADDITIVE PRIME NUMBER THEORY

PAN CHENG-TUNG
(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, we have the following theorem.

Theorem. Every large odd integer can be expressed as

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

1. $p_i = \frac{1}{3}N + O(N^{\frac{5+12c}{6+12c}+\varepsilon})$,

where $\varepsilon > 0$. $c = 15/92$.

2. $p_1 \leqslant N$. $p_2 \leqslant N$. $p_3 \leqslant N^{\frac{2c}{1+2c}+\varepsilon}$.

3. $p_1 \leqslant N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, $p_2 \leqslant N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, $N - N^{\frac{2}{3}+\varepsilon} < p_3 \leqslant N$.

第9卷 第3期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 3
1959年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA Sept., 1959

关于条件期望的一点注意II*

楊宗磐
(南开大学数学系)

作者曾經在[1]里，将定义在概率空間Ω上的几乎处处有穷随机变数全体看作具弱么元1的σ备 Riesz 空間E，将条件期望T看作具特定性质$T1$—$T4$的自E至E中的綫性变换．継之，定义

$$\mathscr{E} = \{y \mid y \in E, \text{对每个囿 } x \in E \text{ 使 } T(xy) = yTx \text{ 成立}\},$$

$$\mathfrak{M}_1 = \{e \mid e \text{ 是属于 } \mathscr{E} \text{ 的特征元}\},$$

$$\mathfrak{M} = \{y \mid y = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, de_\lambda,\ e_\lambda \in \mathfrak{M}_1\};$$

从而得出了：$x \in E$ 的时候，$Tx \in \mathfrak{M}$．今进而了解一下 $\mathfrak{M}$ 的結构，似乎可以得出一个不无兴趣的結果．

引理．$\mathfrak{M}$ 是具弱么元1的σ备 Riesz 空間．

証：因为 $\mathfrak{M}$ 是E的子集，并且 $1 \in \mathfrak{M}$，所以只須証：

1) $x, y \in \mathfrak{M} \Longrightarrow x + y \in \mathfrak{M}$,

2) α 是实数，$x \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \alpha x \in \mathfrak{M}$,

3) $x, y \in \mathfrak{M} \Longrightarrow x \vee y \in \mathfrak{M}$,

4) $\mathfrak{M}$ 的σ备性．

兹逐步証明如下：

1) 設 $x, y \geqq 0$，并且囿．于是，

$$x = \int_0^{M_x} \lambda\, de(x;\lambda), \quad y = \int_0^{M_y} \lambda\, de(y;\lambda).$$

作

$$e_\lambda = \sup\{e(x;\mu) \wedge e(y;\nu) \mid \mu + \nu \leqq \lambda;\ \mu, \nu \text{ 有理数}\}.$$

e_λ 是1的分解的証明：

$$e_{M_x+M_y} = 1,\quad e_{-\lambda} = 0 (\lambda > 0),\quad \lambda_1 \geqq \lambda_2 \text{ 的时候 } e_{\lambda_1} \geqq e_{\lambda_2}$$

都是明显的．

兹設 $\lambda_n \uparrow \lambda$，往証 $e_\lambda = \sup e_{\lambda_n}$．

因为

$$e(x;\mu) \wedge e(y;\lambda-\mu) = \sup\{e(x;\mu_n) \wedge e(y;\lambda-\mu) \mid \mu_n \to \mu - 0\},$$

所以

$$\begin{aligned}\sup e_{\lambda_n} &= \sup_n \sup\{e(x;\mu) \wedge e(y;\nu) \mid \mu + \nu \leqq \lambda_n\}\\ &= \sup\{e(x;\mu) \wedge e(y;\nu) \mid \mu + \nu < \lambda\}\\ &= \sup\{e(x;\mu) \wedge e(y;\nu) \mid \mu + \nu \leqq \lambda\} = e_\lambda.\end{aligned}$$

按e_λ的作法，$e_\lambda \in \mathfrak{M}_1$，定义

* 1959年6月8日收到．

$$x + y = \int_0^{M_x+M_y} \lambda \, de_\lambda = y + x.$$

$x, y \geqq 0$ 但不囿的时候，有囿元 $x_n, y_n \geqq 0, x_n \uparrow x, y_n \uparrow y$. 定义

$$x + y = \sup_n \{x_n + y_n\}.$$

其合理則見 4).

2) 令 $x' = -x$, 則 $(\lambda 1 - x')^+ = -(-\lambda 1 - x)^-$, 所以

$$e(-x; \lambda) = 1 - e(x; -\lambda).$$

这表示 $x \in \mathfrak{M}$ 的时候，$-x \in \mathfrak{M}$. 因而，可以定义一般的和：

$$x + y = x^+ + y^+ - (x^- + y^-).$$

其合理則見 3).

欲証 $x \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \alpha x \in \mathfrak{M}$, 只須对 $\alpha > 0$ 的情形証. 今

$$(\lambda 1 - \alpha x)^+ = (\lambda 1 - \alpha x) \vee 0 = \alpha\left(\frac{\lambda}{\alpha} 1 - x\right) \vee 0 = \alpha\left(\frac{\lambda}{\alpha} 1 - x\right)^+,$$

所以

$$e(\alpha x; \lambda) = e\left(x; \frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

3) 只須对囿 $x, y \geqq 0$ 指出即可. 作

$$e_\lambda = e(x; \lambda) \wedge e(y; \lambda),$$

則 e_λ 是屬于 $x \vee y$ 的 1 的分解.

4) 只須对

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq \cdots \geqq 0$$

証 σ 备性. 显然，有下列关系：

$$e(x_1; \lambda) \leqq e(x_2; \lambda) \leqq \cdots \leqq e(x_n; \lambda) \leqq \cdots.$$

作

$$e_\lambda = \sup_n e(x_n; \lambda),$$

于是

$$e_{-\lambda} = 0 (\lambda > 0), \quad e_{\lambda_1} \geqq e_{\lambda_2} (\lambda_1 \geqq \lambda_2), \quad \sup_{\lambda < \infty} e_\lambda = 1,$$

$$\sup_{\lambda_k < \lambda} e_{\lambda_k} = \sup_{\lambda_k < \lambda} \sup_n e(x_n; \lambda_k) = \sup_n \sup_{\lambda_k < \lambda} e(x_n; \lambda_k) = \sup_n e(x_n; \lambda) = e_\lambda.$$

不难看出 $x = \int_0^\infty \lambda \, de_\lambda$ 就是 $\inf x_n$.

$\mathfrak{M}$ 是 E 的子集，按 1)—4) 定义 $\mathfrak{M}$ 中的运算得到的与 E 中的一致. 关于 2), 3), 4) 是明显的，关于 1) 可以这样簡单地予以說明. 如所周知，具強么元的 σ 备 Riesz 空間可以 Riesz 空間同构地表現为某个 $C(\Omega)$ 的 Riesz 子空間. 在表現 $C(\Omega)$ 里，屬于 $x + y$ 的 1 的分解与屬于 x, y 的 1 的分解間的关系正与 1) 所指出的一致. 所以，这些运算具有 Riesz 空間应具备的一切性質. 明所欲証. （証完）

由这个引理可以推出

分解定理 $x \in E$, 經变換 T 的象 Tx 在 $\mathfrak{M}$ 的每个主法幻等于 $P_e(Tx)$, 这里 P_e 表示对于主法幻 $(e)''$ 的射影，$e \in \mathfrak{M}_1$.

証. 根据[1]中給出的 $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}$ 的性质, σ 备 Riesz 空間 $\mathfrak{M}$ 的特征元全体(即[2]的所謂基)就是 $\mathfrak{M}_1$. 如所周知, $\mathfrak{M}$ 的主法幻全体与 $\mathfrak{M}_1$ σ-Boole 代数同构. (証完)

特别若 E 是具弱么元的备 Riesz 空間, 則同理也可得出 $\mathfrak{M}$ 是具弱么元的备 Riesz 空間. 于是, Tx 可分解为 $P_e(Tx)$, $e \in \mathfrak{M}_1$ 的結合(見[2], ГЛ. II, 2.25). 若具形状 $\alpha 1$ 的元全体更对 T 不变,并且 $T1 = 1$ (見[1], 661 頁,系),則

$$T1 = Se_a, \quad e_a \in \mathfrak{M}_1.$$

这情况更好地符合通常条件期望的性质(見[3], 356 頁,定理 A 及 357 頁,系 2). 但是这里已将"$\mathfrak{B}$ 含一个可分 σ-Boole 代数 $\mathfrak{B}'$ 云云"的限制去掉.

由[1], 661 頁,系还可以推出下列一个簡单結果.

有滿足 $T1$—$T4$ 的两个变換 T, T'. 它們所对应的 $\mathfrak{M}_1$ 分别叫作 $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1'$. 于是 $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_1'$, 并且 $T'1 = 1$ 的时候, $T'(Tx) = Tx$.

关于这个命題可以参看[3], 350 頁,命題 4,第一等式. 但相当于該命題第二等式的 $T(T'x) = Tx$ 却未便得出. 因之, [3], 351頁, 25.2A, 25.3A, 也未便得出; 349 頁命題 2 亦然. 总之,条件期望的性质牽涉到积分的时候,則不便由 $T1$—$T4$ 推出来.

鞅 (Martingale) 及半鞅的收斂問題就牽涉到条件期望的积分性质, 因之, 只依据 $T1$—$T4$ 处理鞅或半鞅似乎是困难的([4], 162 頁定义半鞅就用加性集函数大約就針对这一点. 所以如何規定条件期望,使之更为有效,似乎值得探討). 其可由 $T1$—$T4$ 导出的部分,試述之如下:

設有 E 的元列 $\{x_n\}$, 属于 x_n 的 1 的分解含于(E 的基 $\mathfrak{B}$ 的)子 σ-Boole 代数 $\mathfrak{M}_1^{(n)}$. 称 $\mathfrak{M}_1^{(1)}, \mathfrak{M}_1^{(2)}, \cdots, \mathfrak{M}_1^{(n)}$ 所产生的($\mathfrak{B}$ 的子) σ-Boole 代数为 $\mathfrak{B}_n$.

定义. 設有滿足 $T1$—$T4$ 的变換 T_n, 属于 $T_n x$ 的 1 的分解均含于 $\mathfrak{B}_n$. $x_n = (\leqq) T_n x_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的时候,称 $\{x_n\}$ 构成鞅(半鞅)列.

半鞅列的分解(見[3], 389 頁). 設有元列 $\{x_n\}$, 作

$$x_1'' = 0, \quad x_n = x_n' + x_n'', \quad x_n'' = \sum_{k=2}^{\infty} \{T_{k-1} x_k - x_{k-1}\}.$$

于是, $T_n x_{n+1}' = x_n'$, 所以, $\{x_n'\}$ 构成鞅列. 特别,若 $\{x_n\}$ 是半鞅列, 則 $\{x_n''\}$ 定义式的右端 Σ 号下各項都 $\geqq 0$. 因而, $\{x_n\}$ 被分解成鞅列 $\{x_n'\}$ 及增加正元列 $\{x_n''\}$. 若 $\{x_n''\}$ 囿于上,則半鞅列 $\{x_n\}$ 的极限問題与鞅列 $\{x_n'\}$ 的极限問題同値. 証明見[3].

半鞅列的 $\vee$ 运算不变性 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 构成半鞅列的时候, $\{x_n \vee y_n\}$ 亦然.

証. 只須注意变換 T_n 是保序的,所以,

$$T_n(x_{n+1} \vee y_{n+1}) \geqq T_n x_{n+1} \vee T_n y_{n+1} \geqq x_n \vee y_n. \quad \text{(証完)}$$

特别情形: $\{x_n\}$ 是半鞅列,則 $\{x_n^+\}$ 亦然(見[3], 391 頁).

参 考 文 献

[1] 楊宗磐:关于条件期望的一点注意,数学进展, 3 (1957), 658—661.

[2] Канторович-Вулих-Пинскер, *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах*, 1950.

[3] Loève, M., Probability Theory, 1955.

[4] Bochner, S., Partial Ordering in the Theory of Martingales, *Ann. Math.*, (2) 62 (1955), 162—169.

第9卷 第3期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 3
1959 年 9 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Sept., 1959

稳定性理論中的微分方程与微分差分方程的等价性問題*

秦元勳，刘永清　王　联
(中国科学院数学研究所)

§1. 問題与方法　在[1]中提出了等价性問題，并对于 $n=1$ 的情形作了系統的解决．本文是处理一般 n 的情形．

問題是研究微分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t)\qquad(i=1,2,\cdots n)\tag{1}$$

与微分差分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j(t-\tau_{ij}(t))\qquad(i=1,2,\cdots n)\tag{2}$$

之間在稳定性問題中的等价性．此地 a_{ij} 及 b_{ij} 等均为已給常数；$\tau_{ij}(t)$ 或为非負的实常数，或为非負的实連續函数．

同理研究非綫性微分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t)+F_i^{(2)}(x(t),x(t))\qquad(i=1,2,\cdots n)\tag{3}$$

与非綫性微分差分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j(t)+b_{ij}x_j(t-\tau_{ij}(t)))+F_i^{(2)}(x(t),x(t-\tau(t)))\tag{4}$$

$$(j=1,2,\cdots n)$$

之間的等价性問題．此地 $F_i^{(2)}$ 是二次以上之非綫性項．

关于解法在[1]中利用了 Hayes 的定理[2]，对于一般的 n 对应的定理尚未建立，为了解决我們所提出的問題我們用了两种方法．

第一种方法是对于 $\tau_{ij}(t)$ 均为非負的实常数时所采用的，这时是研究(1)的特征方程

$$D(\lambda)\equiv|a_{ij}+b_{ij}-\delta_{ij}\lambda|=0\tag{5}$$

之根与(2)的特征方程

$$D(\lambda;\tau)\equiv|a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau_{ij}}-\delta_{ij}\lambda|=0\tag{6}$$

的根之間的关系，并从而判定(1)与(2)的零解的稳定性关系．

第二种方法是将(2)写成下形：

---

* 1959 年 8 月 10 日收到．

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}(t)) - x_j(t)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t) + \psi_i(t). \qquad (i = 1,2,\cdots n) \tag{2'}$$

当 $\tau(t)$ 等相当小时，$\psi_i(t)$ 可以看作微小扰动，从而由 (1) 之稳定性质可以推出 (2) 之稳定性质。

这两种方法互有长短.

两种方法均可得出时差界限的具体数值，并将在 §5 中对 $n=2$ 时給出具体結果.

§2. 綫性系統稳定情形的等价性

引理 1. 設 (5) 之所有根的实部为負的，则存在两个正数 $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0$ 及 $\varepsilon = \varepsilon(a_{ij}, b_{ij}) > 0$，使当 $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \quad (j = 1, 2, \cdots n)$ 时，则 (6) 的所有根 λ 均满足关系

$$\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant -\varepsilon.$$

証：(5) 只有 n 个根，設它們的实部的最大值是 L, $L<0$，则不妨取 $\varepsilon = -\frac{L}{2}$. 并进一步，来决定 Δ 如下.

(6) 式可以写成 λ 之 n 次多項式:

$$\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n = 0, \tag{6'}$$

其系数 A_i 为 $e^{-\lambda\tau_{ij}}$ 及 a_{ij}, b_{ij} 之多項式.

在条件

$$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0, \quad \tau_{ij} \geqslant 0 \tag{7}$$

下，知 $|e^{-\lambda\tau_{ij}}| \leqslant 1$，故在 (7) 之条件下，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有界. 以 K_1 記之:

$$K_1 = \max_{i=1,2,\cdots n}|A_i| \quad \text{当 } \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0 \text{ 及 } \tau_{ij} \geqslant 0.$$



图 1

取
$$x_0 = \max(1, (n+1)K_1) > 0,$$
则当
$$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant x_0, \tag{8}$$
由
$$|\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n| \geqslant$$
$$\geqslant |\lambda|^n\left[1 - \frac{|A_1|}{|\lambda|} -, \ldots, -\frac{|A_n|}{|\lambda|^n}\right].$$
$$\geqslant |x_0|^n\left[1 - \frac{nK_1}{(n+1)K_1}\right] > 0$$

知 (6)′ 无根. 类似地在条件

$$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant -\varepsilon, \quad 1 \geqslant \tau_{ij} \geqslant 0 \tag{9}$$

下 $|e^{-\lambda\tau_{ij}}| \leqslant e^{\varepsilon}$，故在 (9) 之条件下，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有界，以 K_2 記之:

$$K_2 = \max_{i=1,2,\cdots n}|A_i| \quad \text{当 } \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant -\varepsilon \text{ 及 } \tau_{ij} \geqslant 0.$$

取
$$y_0 = \max(1, (n+1)K_2) > 0,$$
则当
$$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant -\varepsilon, \quad |I_m(\lambda)| \geqslant y_0, \tag{10}$$

有

$$|\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n| \geqslant |\lambda|^n \left[1 - \frac{nK_2}{(n+1)K_2}\right] >$$

$$> |y_0|^n \left[1 - \frac{nK_2}{(n+1)K_2}\right] > 0.$$

亦卽 (6)′ 无根.

现在要研究

$$S: \quad -\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant x_0, \qquad |I_m(\lambda)| \leqslant y_0 \tag{11}$$

这一矩形中的情形. 其中

$$D(\lambda,\tau) = D(\lambda) + R(\lambda,\tau),$$

$$R(\lambda,0) \equiv 0 \qquad \text{对任何 } \lambda.$$

由假定知 $D(\lambda) = 0$ 之根均在 $\mathrm{Re}(\lambda) < -2\varepsilon$, 故在 S 中及边上 $D(\lambda) \neq 0$.

記

$$m = \min_{\lambda \text{在} S \text{边上}} |D(\lambda)| > 0,$$

則由 $R(\lambda,\tau)$ 对 λ 及 τ_{ij} 之連續性, 有 $\Delta > 0$, Δ 如此小 (不妨取 $\Delta < 1$) 使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta, \tag{12}$$

則有

$$\max_{\lambda \text{在} S \text{边上}} |R(\lambda,\tau)| < m.$$

因此对满足 (12) 之 τ_{ij} 对 S 之边界用 Rouche 定理知道 $D(\lambda,\tau) = 0$ 在 S 中之根之个数与 $D(\lambda) = 0$ 在 S 中之根之个数相同. 而 $D(\lambda) = 0$ 在 S 中无根, 故 $D(\lambda,\tau) = 0$ 亦如此.

合併 (8), (10) 及 (11) 卽得引理 1. 由引理 1 及 Bellman[3] 的一个結果卽可得到.

定理 1. 設方程組 (1) 之零解是漸近稳定的, 則存在一正数

$$\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0$$

使当 $\tau_{ij}(t)$ 为常数, 并且 $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta$ 时, 方程 (2) 之零解是漸近稳定的.

定理 2. 設方程組 (1) 之零解是漸近稳定的, 則存在一正数 $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0$; 使当 $\tau_{ij}(t)$ 滿足

$$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta, \tag{13}$$

$\tau_{ij}(t)$ 为 t 之連續函数时, 方程(2)之零解也是漸近稳定的.

証: 由假定方程組 (1) 是漸近稳定的, 故存在二次型的正定函数 $V(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{ij=1}^{n} c_{ij}x_ix_j$ 使得对方程組 (1)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})x_j\right) = W(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{14}$$

是負定的.

現对方程組 (2), 由 (14)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = W(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i, \tag{15}$$

現考慮最后一項.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+c_{ji})x_j(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}(t))-x_j(t))\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+c_{ji})x_j(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(-\tau_{ij}(t))\frac{dx_j(\xi_{ij})}{dt}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+c_{ji})x_j(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(-\tau_{ij}(t))\sum_{l=1}^{n}(a_{jl}x_l(\xi_{ij})+\right.$$

$$\left.+b_{jl}x_l(\xi_{ij}-\tau_{ij}(\xi_{ij})))\right),$$

这里 $t-\tau_{ij}(t)\leqslant\xi_{ij}\leqslant t,\quad t-2\tau_{ij}(t)\leqslant\xi_{ij}-\tau_{ij}(t)\leqslant t.$ (16)

令

$$U(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(|c_{ij}|+|c_{ji}|)|x_j|\right]\left[\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\sum_{l=1}^{n}(|a_{jl}|+|b_{jl}|)|x_l|\right],\tag{17}$$

则 $U(x_1,\cdots,x_n)$ 永是正定号的二次型 (当所有的 $b_{ij}\neq 0$).

由于 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 正定, $W(x_1,\cdots,x_n)$ 是負定的二次型,故存在一正数

$$m_1=\min_{V=1}|W(x_1,\cdots,x_n)|>0,$$

亦即
$$W\leqslant -m_1V.\tag{18}$$

由于 $U(x_1,\cdots,x_n)$ 是正定号的二次型,故存在一正数

$$m_2=\max_{V=1}|U|>0.$$

如果 b_{ij} 中有一个为 0,则上述的 m, 亦可取到(否則当 $m_2=0$ 时. 命題就不必証, 因为此时 $U\equiv 0$, 亦即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i\equiv 0$. 故沒有差分項了).

亦即
$$U\leqslant m_2V(x_1,\cdots,x_n).\tag{19}$$

取
$$\Delta=\frac{m_1}{4m_2}>0,\tag{20}$$

如果有 $0\leqslant\tau_{ij}(t)\leqslant\Delta$, 并且設在 $\xi-2\Delta\leqslant t\leqslant\xi$ 中

$$V(x_1(t),\cdots,x_n(t))\leqslant 2V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi)),\tag{21}$$

则在 $t=\xi$, 由(15)—(21),

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=\xi}=W(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi))+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i\leqslant$$

$$\leqslant -m_1V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi))+\Delta\cdot U\leqslant$$

$$\leqslant -m_1V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi))+\Delta\cdot m_2V(x_1(t),\cdots,x_n(t))\leqslant$$

$$\leqslant -m_1V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi))+\Delta\cdot 2m_2V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi))$$

$$=-\frac{m_1}{2}V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi)).$$

总結可得：如果在 $\xi-2\Delta\leqslant t\leqslant\xi$ 有关系式 (21)，則在 $t=\xi$ 时有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=\xi}\leqslant-\frac{m_1}{2}V\Big|_{t=\xi}. \tag{22}$$

不等式 (22) 便可用来証明我們的定理.

对任何 $\varepsilon>0$，只要在 $-2\Delta\leqslant t\leqslant 0$ 中初始函数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 满足不等式 $V(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\leqslant\varepsilon$，則可断言此后 $t\geqslant 0$ 均有

$$V(x_1(t),\cdots,x_n(t))\leqslant\varepsilon. \tag{23}$$

这可反証之，如果 (23) 不成立，則 $(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 可穿出 $V(x_1(t),\cdots,x_n(t))=\varepsilon$ 之外，不妨設第一个穿出之点在 $t=\xi$，則当 $t<\xi$ 时就有

$$V(x_1(t),\cdots,x_n(t))\leqslant\varepsilon<2\varepsilon=2V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi)),$$

則由 (22) 知在 $t=\xi$，$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=\xi}\leqslant-\frac{m_1}{2}\varepsilon<0$，故 t 加大时 V 减少，因此 $(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 不能穿出 $V=\varepsilon$ 之外，由此导出矛盾.

(23) 表示了稳定性，但我們还要进一步証明漸近稳定性.

不等式 (21) 及 (22) 还可得出另一結論，当 $t\geqslant 0$

$$V(x_1(t),\cdots,x_n(t))\leqslant\frac{1}{2}\max_{t-2\Delta\leqslant u\leqslant t}V(x_i(u),\cdots,x_n(u)) \tag{24}$$

因此 $\overline{\lim_{t\to\infty}}V(x_1(t),\cdots,x_n(t))\leqslant\frac{1}{2}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\max_{t-2\Delta\leqslant u\leqslant t}V(x_1(u),\cdots,x_n(u))=\frac{1}{2}\overline{\lim_{t\to\infty}}V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$，

但已知在 $-2\Delta\leqslant t\leqslant 0$ 时，如果 $V(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\leqslant\varepsilon$，則 (23) 成立. 故

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}V(x_1(t),\cdots,x_n(t))=L<+\infty$$

$$0\leqslant L\leqslant\frac{1}{2}L.\ \text{故}\ L=0\ \text{即}\ \lim_{t\to\infty}V(x_1(t),\cdots,x_n(t))=0,$$

卽亦 $\lim_{t\to+\infty}(x_1^2(t),+\cdots+x_n^2(t))=0$.　　定理 2 証毕.

定理 1 及 2 均为 [1] 中定理 1 之推广，但用了两种另外的方法避免了原証中的困难.

§ 3. 綫性系統不稳定情形的等价性

引理 2. 設 (5) 至少有一个根具有正实部，則存在一正数

$$\Delta=\Delta(a_{ij},b_{ij})>0$$

使当　　$0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\Delta\quad(i,j=1,2,\cdots n)$.

則 (6) 至少有一个根具有正实部.

証：主要是用 Rouche' 定理，任取 (5) 之一个具有正实部之根 λ_0，

$$\operatorname{Re}(\lambda_0)=\eta>0.$$

以 λ_0 为心，$\frac{\eta}{m}$ 为半径作一个圆 Γ. m 为正整数，m 取如此大，使在 Γ 边上 (6) 不存在零

点. 现取 Δ 如此小,使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \qquad (i,j = 1,2,\cdots n),$$

$$\max_{\lambda \text{在} \Gamma \text{上}} |R(\lambda;\tau_{ij})| < \min_{\lambda \text{在} \Gamma \text{上}} |D(\lambda)|.$$

故 (6) 在 Γ 中之根之个数与 (5) 在 Γ 中之根之个数相同, 因此 (6) 在 Γ 内至少有一个具正实部之根. 引理 2 証毕.

由引理 2 立即得到

定理 3. 如果 (5) 至少有一个具正实部之根,因而 (1) 之零解是不稳定的, 则必存在一个正数

$$\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0,$$

使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \qquad (i, j = 1, 2, \cdots n),$$

则 (2) 之零解是不稳定的.

定理 4. 定理 3 中 $\tau_{ij}(t)$ 为常数之假定可以省去,定理仍成立,只要 $0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta$ 即可.

証: 现在設 (5) 至少有一个具有正实部之根,分别两种情形研究之:

(甲) 一种情形是所有特征根的实部均相等,

(乙) 一种情形是至少有两个特征根其实部不相等.

以下分别証明之.

(甲) 設共同的实部是 $\lambda > 0$, 将方程組 (2) 写成 (2)′, 經过非奇异的綫性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \qquad \text{这里} \quad |c_{ij}| \neq 0 \quad (i,j=1,2,\cdots n).$$

可以将 (2)′ 化为約当型

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_n(t) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

此地 M_i 是

$$\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\mu & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

之形.

引入函数 $V = V(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$, 则对 (25) 作 $\frac{dV}{dt}$ 有

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_i}\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} 2\xi_i \frac{d\xi_i}{dt} = \lambda V + 2\sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\psi}_i(t).$$

現在来研究尾項 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\psi}_i(t)$. 这里 $\bar{\psi}_i(t)$ 是 $\psi_j(t)$ 之綫性組合，故 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\psi}_i$ 将如(17)之形式，因此亦如定理 2 之証法，对于 $0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta$，如果在

$$t_1 - 2\Delta \leqslant t < t_1 \tag{26}$$

有

$$V(t) \leqslant 2V(t_1),$$

則可得出

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\psi}_i(t)\right| \leqslant \Delta K V(t_1),$$

此地K为某常数，只与 a_{ij} 及 b_{ij} 有关，$K > 0$，取 $\Delta \leqslant \dfrac{\lambda}{4K} > 0$，

則在条件 (26) 下，在 $t = t_1$ 有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} \geqslant \lambda V(t_1) - 2\Delta K V(t_1) = \frac{\lambda}{2} V(t_1). \tag{27}$$

不等式 (27) 可以立即推出不稳定性. 因对初值如取

$$V(t) = \eta(t + 2\Delta) > 0, \qquad -2\Delta \leqslant t < 0,$$

η 可任意小，則 (26) 被滿足故由 (27) 有 $\dfrac{dV}{dt} > 0$，故 $V(t)$ 单調增加，并以 $V(t) \geqslant V(t_0)e^{\frac{1}{2}\lambda(t-t_0)}$ 之指数函数增加.

如果 (27) 遭到破坏且必須 (26) 遭到破坏，設第一个破坏 (26) 之点在 t_2，这便要有 $t_1 < t_2$ 且

$$V(t_1) = 2V(t_2),$$

这便表示在 $t < t_2$ 时，$V(t)$ 已不是单調的，因而 t_2 不是第一个破坏 (26) 之点，由此得出矛盾(甲)之情形，証毕.

（乙）設 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 为对应于特征根有实部为 λ_1 之变量.

$\xi_{m+1}, \cdots, \xi_n$ 为对应于特征根有实部小于 $\lambda_2(<\lambda_1)$ 之变量，由假設必有 $\lambda_1 > 0$.

引入两个新变量

$$X = \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2,$$
$$Y = \xi_{m+1}^2 + \cdots + \xi_n^2,$$

則有

$$\frac{dX}{dt} \geqslant \lambda_1 X - \varepsilon \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant i,j \leqslant m}} |\xi_i|\,|\xi_j| - \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|\,|\bar{\psi}_i(t)|,$$

$$\frac{dY}{dt} \leqslant \lambda_2 Y + \varepsilon \sum_{\substack{i \neq j \\ m+1 \leqslant i,j \leqslant n}} |\xi_i|\,|\xi_j| + \sum_{i=m+1}^{n} |\xi_i|\,|\bar{\psi}_i(t)|.$$

現在在 $0 \leqslant Y \leqslant X \leqslant L$ (L 某正常数) 中来考慮，則对任何 $\varepsilon > 0$ 取定則可有 $\Delta > 0$，使得如果条件

$$0 \leqslant Y(t_1) \leqslant X(t_1) \leqslant 2 \max_{t_1 - 2\Delta \leqslant t \leqslant t_1} X(t) \tag{*}$$

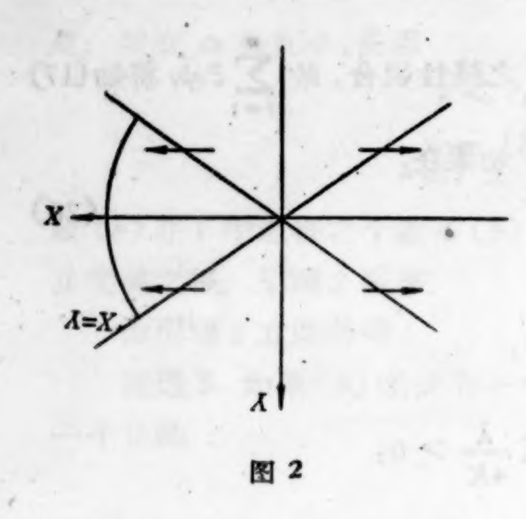


图 2

满足时,则

$$\sum_{i=1}^{m} |\xi_i(t)|\,|\bar{\psi}_i(t)| \leqslant \varepsilon X(t),$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} |\xi_i(t)|\,|\bar{\psi}_i(t)| \leqslant \varepsilon X(t);$$

则在条件(*)下,有

$$\frac{dX}{dt} \geqslant \lambda_1 X - 2\varepsilon X,$$

$$\frac{dY}{dt} \leqslant \lambda_2 Y + 2\varepsilon X.$$

现在研究在 $X = \pm Y > 0$ 边上:

$$-1 < \frac{dY}{dX} < +1, \quad 只要\left|\frac{\lambda_2 + 2\varepsilon}{\lambda_1 - 2\varepsilon}\right| < 1 即可.$$

这是可能的,因为 $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$,故取 $\varepsilon = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{5}$ 即可. 则在 $X = \pm Y > 0$ 边上有

$$\frac{dX}{dt} \geqslant (\lambda_1 - 2\varepsilon) X > 0, \qquad \left|\frac{dY}{dX}\right| < 1,$$

故矢量箭头指向 $X > Y$ 区中. 而在 $0 \leqslant Y \leqslant X \leqslant L$ 內則有

$$\frac{dX}{dt} \geqslant (\lambda_1 - 2\varepsilon) X > 0.$$

故在条件

$(*)_1$ $\quad 0 \leqslant Y \leqslant X \leqslant L$ 和在 $t_1 - 2\Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 以及 $0 \leqslant Y(t) \leqslant X(t) < 2 \max\limits_{t-2\Delta \leqslant t_1 \leqslant t} X(t)$

下可保証得

$$\frac{dX}{dt} > 0.$$

为此我們取初值:

$$Y(t) = 0 \qquad (-2\Delta \leqslant t \leqslant 0),$$
$$X(t) = \eta(t + 2\Delta), \qquad \eta > 0.$$

η 可任意小,則条件 $(*)_1$ 滿足,这时 $X(t)$ 单調增加,并且 $X(t) \geqslant X(0)e^{(\lambda_1 - 2\varepsilon)t}$ 这个增长率要破坏是要上述两条件之一被破坏. 但是

$$0 \leqslant Y \leqslant X \leqslant L$$

不能在边上, $0 < Y = X < L$ 处破坏. 因为向量場向內,只可能在 $X = L$ 处破坏,但这时得到不稳定了,在条件 $t_1 - 2\Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 中

$$X(t) < 2X(t_1)$$

要破坏,則第一点破坏之点設在 t_0, 在 $t_0 - 2\Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 中有 t_2, 使

$$X(t_2) = 2X(t_1), \ 則在\ t_2 \leqslant t \leqslant t_1\ 中\ \frac{dX}{dt}\ 可能是正的,$$

因而得出矛盾.

引理 3. 設 $D(0)$ 与 $(-1)^n$ 异号，亦即(5)有奇数个具正实部之根，但 $\lambda=0$ 不是(5)之根，則对任何实数組 $\tau_{ij}\geqslant 0\quad(i,j=1,2,\cdots n)$，方程(6)至少有一个根具正实部.

証：
$$D(0,\tau_{ij})=D(0),\qquad D(0;\tau_{ij})\text{ 与 }(-1)^n\text{ 反号}.$$

$$D(+\infty;\tau_{ij})\sim\lim_{\lambda\to\infty}(-1)^n\lambda^n,\text{ 故 }D(0;\tau_{ij})\text{ 与 }D(+\infty;\tau_{ij})\text{ 反号},$$
$$(i,j=1,2,\cdots n')$$

故至少有一个正实根.

定理 5. 設 $D(0)$ 与 $(-1)^n$ 异号，此时知(1)之零解是不稳定的，則不論 τ_{ij} 为何非負实数，(2)之零解也不稳定.

这由引理 3 立即可得出，(6)有一正实根 λ，則有解趋于 $+\infty$，当 $t\to+\infty$. 故得不稳定.

在 $n=1$ 时 对不稳定的情形，$\Delta=+\infty$，即对任何 $\tau_{ij}\geqslant 0$，仍得到不稳定，現在定理 5 只对有奇数个具正实部之根的情形，$\Delta=+\infty$. 至于有偶数具正实部之根的情形，則 Δ 不一定为 $+\infty$. 下面举出反例，即 $\tau_{ij}=0$ 时为不稳定，而当 $\tau_{ij}>0$ 足够大时反而变为稳定之例. 現作一二阶方程組

$$\frac{dx(t)}{dt}=y(t)+K(y(t)-y(t-\tau))+\varepsilon x(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=-x(t)-K(x(t)-x(t-\tau))+\varepsilon y(t),$$

ε 为常数，則特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda+\varepsilon & 1+K(1-e^{-\tau\lambda})\\ -1-K(1-e^{-\tau\lambda}) & -\lambda+\varepsilon\end{vmatrix}=0 \qquad (*)_2$$

或　$(-\lambda+\varepsilon)^2+[1+K(1-e^{-\tau\lambda})]^2=0$ 或 $\lambda=\varepsilon\pm i\sqrt{1+K(1-e^{-\tau\lambda})^2}$.

当 $\tau=0$ 时有 $\lambda=\varepsilon\pm i$，故当 $\varepsilon>0$ 为不稳定.

$\varepsilon<0$ 为稳定，現对 $(*)_2$ 微分之有

$$2(-\lambda+\varepsilon)\left(-\frac{d\lambda}{d\tau}\right)+2[1+K(1-e^{-\tau\lambda})](Ke^{-\lambda\tau})\left(\lambda+\tau\frac{d\lambda}{d\tau}\right)=0;$$

故有

$$\frac{d\lambda}{d\tau}=\frac{-[1+K(1-e^{-\tau\lambda})]Ke^{-\lambda\tau}\lambda}{(\lambda-\varepsilon)+\tau[1+K(1-e^{-\tau\lambda})]Ke^{-\tau\lambda}}.$$

可以确定常数 $A>0$ 及 $\eta>0$，使在区域 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant A$ 及区域 $\begin{matrix}I_m(\lambda)\geqslant A\\ \mathrm{Re}(\lambda)\geqslant-\eta\end{matrix}$ 中对任何 $\tau\geqslant 0$ $(*)_2$ 之 λ 无根.

現当　$\tau=\varepsilon=0$,

$\frac{d\lambda}{d\tau}=-K$，由連續性有 $\varepsilon_1>0$ 及 $\tau_1>0$，使当 $|\varepsilon|<\varepsilon_1$, $|\tau|<\tau_1$ 时在区域 $\left|\begin{matrix}I_m(\lambda)\\ \mathrm{Re}(\lambda)\end{matrix}\right|\begin{matrix}\leqslant A\\ \leqslant\varepsilon_1\end{matrix}$ 中

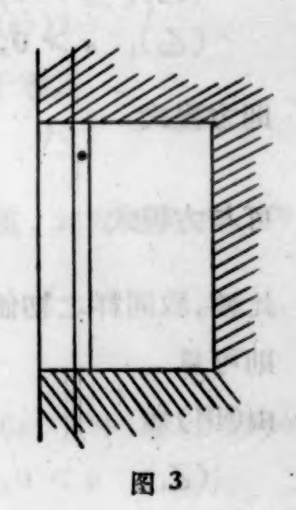


图 3

有
$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) < -\frac{K}{2}, \qquad (\text{当 } K > 0)$$
$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) > -\frac{K}{2}. \qquad (\text{当 } K < 0)$$

故有一有限时間，例如 $\frac{\tau_1}{2}$，速度在 $-\frac{K}{2}$ $(K>0)$，則 $\operatorname{Re}(\lambda)$ 要跑过 $\frac{\tau_1}{2}\left(\frac{K}{2}\right) > \frac{\varepsilon_1}{m}$，$m$ 为一足够大的正整数，故可取

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{m}.$$

即得則由不稳定性变成了稳定．故此时不稳定性的时差有限制．

关于 $n=1$ 时不稳定的情形，还可以推广到下面的变时滞的情形．

定理 6. 已給一微分差分方程，

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t-\tau(t)) \tag{2}$$

满足条件 (i)$a+b>c$，(ii)$\tau(t)$ 是非負有界实連續函数 $0 \leqslant \tau(t) \leqslant \Delta$，則方程(2)之零解是不稳定的．

証：$b=0$ 时不需証明．故設 $b \neq 0$，以下分別 $a=0$ 及 $a \neq 0$ 証明之．

（甲）$a=0$ 方程化为

$$\frac{dx(t)}{dt} = bx(t-\tau(t)), \qquad b>0.$$

取初值 $x(t)=\eta>0$，$-\Delta \leqslant t \leqslant 0$ （η 可任意小）．則 $x(t)$ 显然是单調增加的，只要証其无界即可．用反証法．

如果 $x(t)$ 有界，則有极限 $x(t) \to x(\infty) > 0$． 当 $t \to \infty$．

因 $|\tau(t)| \leqslant \Delta$，故也有 $x(t-\tau(t)) \to x(\infty) > 0$，当 $t \to \infty$．

由此 $bx((t-\tau(t)) \to bx(\infty) > 0$．由此，$x(t) \sim bx(\infty)$，$t \to \infty$，这便得出 $x(t)$ 无界，故 $a=0$．証毕．

（乙）$a \neq 0$．由于 $a+b>0$，故有三种可能情形，分別証明之：

（乙）$_1$ $a>0, b>0$；（乙）$_2$ $a>0, b<0$；（乙）$_3$ $a<0$，$b>0$．

（乙）$_1$ $a>0$，$b>0$，$a+b>0$．

則方程式
$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t-\tau(t)).$$

可与方程式
$$\frac{dz(t)}{dt} = bz(t-\tau(t))$$

比較，取同样之初值 $x(t)=z(t)=\eta>0$，当 $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$

則可見
$$x(t) \geqslant z(t) > 0.$$

由(甲)知
$$z(t) \to +\infty, \quad \text{故 } x(t) \to +\infty.$$

（乙）$_2$ $a>0, b<0$，$a+b>0$， 故 $a>-b>0$．

取 $x(t)$ 之初値为正的連續的，严格单增的，但小于某一已給正数 η 的函数，

例如在　　$-\Delta \leqslant t \leqslant 0$ 中取　$x(t) = \dfrac{\eta}{2} + \dfrac{\eta}{2}\left(\dfrac{-\Delta - t}{-\Delta}\right)$,

則因 $ax(t) + bx(t - \tau(t)) = ax(t)\left[1 + \dfrac{b}{a}\dfrac{x(t - \tau(t))}{x(t)}\right]$，而 $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$,　$x(t) >$

$x(t - \tau(t))$. 故在 $t > 0$ 时有一段时間知道 $\dfrac{dx(t)}{dt} > 0$，从而得到 $x(t)$ 严格单增.

現在可进一步断言，$\dfrac{dx}{dt} > 0$ 对所有之 $t \geqslant 0$.

如其不然，則有某 $t_1 > 0$,　$\dfrac{dx(t_1)}{dt} > 0$. 而在 $-\Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 中 $x(t)$ 严格单增，而在

$t = t_1$ 有

$$0 = \frac{dx(t_1)}{dt} = ax(t_1) + bx(t_1 - \tau(t_1)) > ax(t_1) - |b||x(t_1)| =$$
$$= x(t_1)[a - |b|] = x(t_1)(a + b) > 0,$$

故矛盾了. 因此 $\dfrac{dx(t)}{dt} > 0$ 对所有之 $t \geqslant 0$ 成立.

則 $x(t)$ 严格单增. 这又可分为两种情形：即 $x(t)$ 有界与 $x(t)$ 无界. 对 $x(t)$ 有界的情形，則又有极限，故又将导出矛盾. 因此 $x(t)$ 无界. 从而得到不稳定性.

(乙)$_3$　$a < 0$, $b > 0$, $a + b > 0$, 故 $b > -a > 0$.

取初值为 $x(t) = \eta > 0$,　$-\Delta \leqslant t \leqslant 0$. 則首先我們断言这个解为恆正的.

用反証法：設在 $t_1 > 0$, $x(t_1) = 0$, t_1 为第一个零点. 則又可分两种情形研究之.

即　　　　当 $t \to t_{1-0}$,　$x(t)$ 单調接近于零；

　　　　　当 $t \to t_{1-0}$,　$x(t)$ 振动接近于零.

对单調接近于零之情形，則当 t 充分接近于 t_{1-0} 有

$$0 < x(t) < x(t - \tau(t)).$$

故　$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau(t)) = bx(t - \tau(t))\left[1 + \frac{a}{b}\frac{x(t)}{x(t - \tau(t))}\right] > 0$$

$$\left(\text{因 } b > 0,\ x(t - \tau(t)) > 0,\ \left|\frac{a}{b}\right| < 1,\quad \left|\frac{x(t)}{x(t - \tau(t))}\right| \leqslant 1\right)$$

故 $\dfrac{dx}{dt} > 0$. 当 t 接近于 t_1, 故在 t_1 附近 $x(t)$ 不能单調減少并接近于零.

其次对于 $x(t)$ 振动接近于零可也推出矛盾如下：

以 $m_1, m_2, \cdots, m_n \cdots$ 記 $\tau(t)$ 之第 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 个相对最小値，其时間为 $t^{(1)}, t^{(2)}, \cdots, t^{(n)}, \cdots$ 則在 $t^{(n)}$ 有

$$0 = \frac{dx(t^{(n)})}{dt} = ax(t^{(n)}) + bx(t^{(n)} - \tau(t^{(n)})),$$

而 $x(t^{(n)}) > 0$, $b > -a > 0$, 故 $\tau(t^{(n)}) \neq 0$　（否則 $0 = ax(t^{(n)}) + bx(t^{(n)}) = (a + b)\ x(t^{(n)}) > 0$. 矛盾了）.

由此可見 $m_n = x(t^{(n)}) = -\frac{b}{a}x(t^{(n)} - \tau(t^{(n)})) \geqslant -\frac{b}{a} \min_{t^{(n)}-\Delta \leqslant t \leqslant t^{(n)}} x(t)$.

注意到 $-\frac{b}{a} > 1$，故对 m_1 而言，在 $t < t^{(1)}$ 还有 $x(t) > x(t^{(1)})$，这表示：

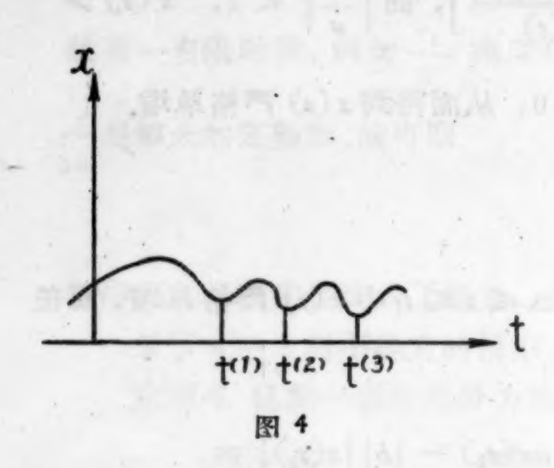


图 4

$$m_1 \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\eta,$$

$$m_2 \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\min[m,\eta] = \left(-\frac{b}{a}\right)\eta,$$

$$m_3 \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\min[m_1, m_2, \eta] = \left(-\frac{b}{a}\right)\eta \cdots,$$

………………

$$m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\eta > 0.$$

故 $x(t)$ 不能趋于零. 由此知道 $x(t)$ 也不能振动趋于零.

上述推理对于 $t_1 = +\infty$ 也可用，亦即 $x(t)$ 不能单減趋于零，也不能振动趋于零. 并且当 $x(t)$ 振动时 $x(t)$ 有正下界.

下面对 $x(t)$ 再詳細研究之分三种情形：(α)，$x(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时单調減少，(β)，$x(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时单調增加，(γ)，$x(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时振动.

(α) 是不可能的，因此时 $x(t)$ 有正下界，则

$$0 = \lim_{t\to\infty} \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty} [ax(t) + bx(t - \tau(t))] = (a + b)x(\infty) > 0.$$

(β) $x(t)$ 必无界，否则也有极限，可如 (α) 得矛盾，这时得到不稳定.

(γ) 此时只要証 $m_n \to +\infty$ 即可

由 $m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right) \min_{t^{(n)}-\Delta \leqslant t \leqslant t^{(n)}} x(t)$ 知 $m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\eta$,

故 $$x(t) \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\eta, \quad \text{当 } t \geqslant t'.$$

以 $t' \leqslant t \leqslant t' + \Delta$ 为初始条件（即用 $\left(-\frac{b}{a}\right)\eta$ 代 η），则对大于 $t' + \Delta$ 之 $t^{(n)}$

有 $$m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)\eta\right] = \left(-\frac{b}{a}\right)^2\eta,$$

故 $$\varliminf_{t\to\infty} m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)^K \eta, \quad K\text{为任意大之正整数}. \quad \text{又} -\frac{b}{a} > 1,$$

故 $$\varliminf_{n\to\infty} m_n = +\infty, \quad \therefore \lim_{n\to\infty} m_n = +\infty.$$

因此在情形 (γ) 也得到不稳定. 定理 5 証毕.

注意这个定理的条件 (i) (ii) 均不可減去. (i) 是显然的，而 (ii) 如減弱为 $\tau(t)$ 非

負实連續函数，則例如取 $\tau(t) = t$ 方程化为

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(0).$$

这时如果 $a < 0$, $b > 0$, $a + b > 0$，則得到零解是稳定的.

§ 4. 非綫性系統稳定情形的等价性

定理 7. 設方程組(1)是漸近稳定的. 給定一个非綫性系統:

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j(t) + b_{ij}x_j(t - \tau_{ij}(t)) + F_2^{(i)}(x(t), x(t - \tau(t))), \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

此地

$$F_2^{(i)} = \sum_{\Sigma(l_j+m_j)\geqslant 2} P_i^{(l_1,\cdots,l_n,m_1,\cdots,m_n)} x_1^{l_1}(t), \cdots, x_n^{l_n}(t)\, x_1^{m_1}(t - \tau_{i_1}(t)), \cdots x_n^{m_n}(t - \tau_{i_n}(t)),$$

并且有正数 $\varepsilon > 0$，使

$$\sum_{\sum_{j=1}^{n}(l_j+m_j)\geqslant 2} |p_i^{(l_1,\cdots,l_n,m_1,\cdots,m_n)}| \cdot \varepsilon^{l_1+\cdots+l_n+m_1+\cdots+m_n} < +\infty,$$

則必存在一正数 $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}, F_2^{(i)}) > 0$，使当 $0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta$,
則 (4) 的零解是漸近稳定.

証明亦如定理 2，只要这时取

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = W(x_1, \cdots, x_n) + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i^{(2)},$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_2^{(i)}(x(t), x(t - \tau(t))) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_2^{(i)}(x(t), x(t)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}[F_2^i(x(t), x(t - \tau(t))) - F_2^{(i)}(x(t), x(t))] = W_1 + W_2.$$

在 $|x_i(t)|$ 足够小时可使 $|W_1| \leqslant \frac{m_1}{8}V$.

当 $|\tau_{ij}(t)| < \Delta$ 足够小时，可使 $|W_2| \leqslant \frac{m_2}{2}V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 在 $\xi - 2\Delta \leqslant t \leqslant \xi$ 中成立.

由此可知

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=\xi} \leqslant -m_1V(x_i(\xi), \cdots, x_n(\xi)) + \frac{m_1}{8}V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)) +$$

$$+ \Delta\left(2m_2 + \frac{m_2}{2}\right)V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)) = \left(-m_1 + \frac{m_1}{8} +\right.$$

$$\left.+ \frac{2}{4}m_1 + \frac{m_1}{8}\right)V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)) = \frac{-m_1}{4}V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)).$$

同理得証

定理 8. $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau(t)) + \sum_{i+j\geqslant 2} c_{ij} x^i(t) x^j(t - \tau(t))$,

满足条件 (i) $a + b > 0$, a, b 为常数;

(ii) $0 \leqslant \tau(t) \leqslant \Delta$, Δ 为常数;

(iii) $\sum |c_{ij}| \varepsilon^{i+j} < +\infty$, ε 为足够小之常数.

则原方程之零解不稳定.

証: 将原方程写成

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(a - \frac{a+b}{4}\right) x(t) + \left(b - \frac{a+b}{4}\right) x(t - \tau(t)) +$$

$$+ \frac{a+b}{4}(x(t) + x(t - \tau(t))) + \sum_{i+j\geqslant 2} c_{ij} x^i(t) x^j(t - \tau(t)),$$

则存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使当 $0 \leqslant x(t) \leqslant \varepsilon_1$, $0 \leqslant x(t - \tau(t)) \leqslant \varepsilon_1$ 时就有

$$\left(\frac{a+b}{4}\right)(x(t) + x(t - \tau(t))) + \sum_{i+j\geqslant 2} c_{ij} x^i(t) x^j(t - \tau(t)) \geqslant 0.$$

作比較方程

$$\frac{dX(t)}{dt} = \left(a - \frac{a+b}{4}\right) X(t) + \left(b - \frac{a+b}{4}\right) X(t - \tau(t)),$$

其系数之和为

$$a - \frac{a+b}{4} + b - \frac{a+b}{4} = \frac{a+b}{2} > 0.$$

故以 $X(t) \equiv \eta \geqslant 0$, $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$ 为初值之解是不稳定,并且有 $\frac{dX}{dt} > 0$ 及 $X(t) \to +\infty$. 由此用 $X(t)$ 作比較函数,则在 $|x(t)| < \min(\varepsilon_1, \varepsilon)$ 中有 $\frac{dx(t)}{dt} > \frac{dX(t)}{dt}$.

取同样的初值 $x(t) \equiv X(t) = \eta > 0$, $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$, 则恆有 $x(t) \geqslant X(t)$. 这不等式一直被保持到 $x(t)$ 超出 $\min(\varepsilon_1, \varepsilon)$ 为止. 而 $\min(\varepsilon_1, \varepsilon)$ 是个正定数,但 η 可为任何小之正数,而 $x(t)$ 一定会超过 $\min(\varepsilon_1, \varepsilon)$ 这一定数. 由此即得不稳定.

定理証毕.

定理 9. 設(5)至少有一个具正实部的解,因而(1)之零解为不稳定;其它假定仍如定理 7. 則存在一正数

$$\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}, F_2^{(i)}) > 0$$

使当

$$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta,$$

則(4)之零解不稳定.

証明重复了定理 4 之两种情形, 只要注意到当 $|x_i(t)|$, $|x_i(t - \tau_{ij}(t))|$ 足够小时, F 之高次項不影响向量場(例如图 2)之增长方向,卽得証明,故略去之.

§5. $n=2$ 时　时滞界限的具体計算

在上节中已証明了一般性的定理并給出了具体求时滞界限的方法，对 $n=1$ 之情形，已在 [1] 中求出界限，現对 $n=2$ 时用两种方法具体算出充分条件之界限.

以下首先利用特征根方法对稳定情形之时滞界限进行估計.

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + b_{11}x_1(t-\tau_{11}) + a_{12}x_2(t) + b_{12}x(t-\tau_{12}), \\
\dfrac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + b_{21}x_1(t-\tau_{21}) + a_{22}x_2(t) + b_{22}x(t-\tau_{22}).
\end{cases}
$$

它的特征方程是

$$
\begin{aligned}
D(\lambda,\tau_{ij}) &\equiv \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}e^{-\lambda\tau_{11}}-\lambda & a_{12}+b_{12}e^{-\lambda\tau_{12}} \\ a_{21}+b_{21}e^{-\lambda\tau_{21}} & a_{22}+b_{22}e^{-\lambda\tau_{22}}-\lambda \end{vmatrix} \\
&\equiv \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}+b_{11}(e^{-\lambda\tau_{11}}-1)-\lambda & a_{12}+b_{12}+b_{12}(e^{-\lambda\tau_{12}}-1) \\ a_{21}+b_{21}+b_{21}(e^{-\lambda\tau_{21}}-1) & a_{22}+b_{22}+b_{22}(e^{-\lambda\tau_{22}}-1)-\lambda \end{vmatrix} \\
&\equiv [\lambda^2+p\lambda+q]+H(\lambda,\tau_{ij}) \\
&\equiv D(\lambda)+H(\lambda,\tau_{ij}),
\end{aligned}
$$

此地 $D(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q$,

$$
\begin{aligned}
H(\lambda,\tau_{ij}) = {} & \lambda[-b_{11}(e^{-\lambda\tau_{11}}-1)-b_{22}(e^{-\lambda\tau_{22}}-1)]+ \\
& +[(e^{-\lambda\tau_{11}}-1)b_{11}(a_{22}+b_{22})+(e^{-\lambda\tau_{22}}-1)b_{22}(a_{11}+b_{11})+ \\
& +(e^{-\lambda\tau_{11}}-1)(e^{-\lambda\tau_{22}}-1)b_{11}b_{22}-(e^{-\lambda\tau_{21}}-1)b_{21}(a_{12}+b_{12})- \\
& -(e^{-\lambda\tau_{12}}-1)b_{12}(a_{21}+b_{21})-(e^{-\lambda\tau_{21}}-1)(e^{-\lambda\tau_{12}}-1)b_{12}b_{21}].
\end{aligned}
$$

特別有 $H(\lambda,0)=0$.

取
$$A=\max_{i,j=1,2}[|a_{ij}|,|b_{ij}|],$$

則
$$
\begin{aligned}
0<p=-[a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}] &\leqslant [|a_{11}|+|b_{11}|+|a_{22}|+|b_{22}|] \\
&\leqslant 4A,
\end{aligned}
$$

$$
0<q=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \leqslant 8A^2.
$$

取 $\lambda_0=6A>0$，則当 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant\lambda_0>0$ 时，

$$\tau_{ij}\geqslant 0, |e^{-\lambda\tau_{ij}}|\leqslant 1.$$

$$
\begin{aligned}
|D(\lambda,\tau_{ij})| \geqslant {} & |\lambda|^2-|\lambda|[(|a_{11}|+|b_{11}|+|a_{22}|+|b_{22}|)]- \\
& -[(|a_{11}|+|b_{11}|)(|a_{22}|+|b_{22}|)+(|a_{21}|+ \\
& +|b_{21}|)(|a_{12}|+|b_{12}|)]\geqslant \\
\geqslant {} & |\lambda|^2-|\lambda|4A-8A^2=|\lambda|2A-8A^2\geqslant \\
\geqslant {} & (6A)(2A)-8A^2=4A^2>0.
\end{aligned}
$$

故在 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant\lambda_0$ 中，$D(\lambda,\tau_{ij})=0$ 无根，对 $\tau_{ij}\geqslant 0$.

其次命
$$-L=\mathrm{Re}\left(-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)<0,$$
$$L>0,$$

则当 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant -\frac{L}{2}$, $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \frac{2}{L}$ 时,

$$|e^{-\lambda\tau_{ij}}| \leqslant e^{(\frac{L}{2})(\frac{2}{L})} = e,$$

故当 $|I_m(\lambda)| \geqslant 6Ae,$

则可取

$$\begin{aligned}|D(\lambda,\tau_{ij})| &\geqslant |\lambda|^2 - |\lambda|e[|a_{11}| + |b_{11}| + |a_{22}| + |b_{22}|] - \\ &- e^2[(|a_{11}|+|b_{11}|)(|a_{22}|+|b_{22}|)+(|a_{12}| + |b_{12}|)(|a_{21}|+|b_{21}|)]\geqslant \\ &\geqslant |\lambda|^2 - |\lambda|4Ae - 8A^2e^2 \geqslant \\ &\geqslant 6Ae[6Ae - 4Ae] - 8A^2e^2 = 4A^2e^2 > 0.\end{aligned}$$

故在 $R(\lambda) > -\frac{L}{2}$, $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \frac{2}{L}$, $|I_m(\lambda)| \geqslant 6Ae$,

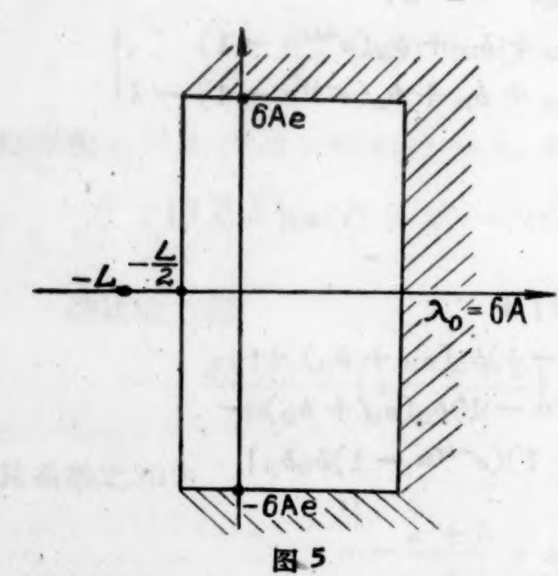


图 5

则得到 $|D(\lambda, \tau_{ij})| > 0$.

故这里没有根.

下面要計算

$|D(\lambda)|$ 在 $x = 6A$, $x = -\frac{L}{2}$;

$y = 6Ae$, $y = -6Ae$

四边形边上 R 之极小值 $\min\limits_{R} |D(\lambda)|$.

$$D(\lambda) = \lambda^2 + \lambda p + q,$$

$$\begin{aligned}D(x+iy) &= (x+iy)^2+p(x+iy)+q = \\ &= x^2+i2xy - y^2+px+ipy+q = \\ &= (x^2+px+q-y^2)+i(2xy+py),\end{aligned}$$

故 $|D(x+iy)|^2 = [(x^2 - y^2 + px + q)]^2 + [(2x + p)y]^2$.

在 $x = \lambda_0$ 上有

$$|D(\lambda_0 + iy)|^2 = [\lambda_0^2 + p\lambda_0 + q - y^2]^2 + [(2\lambda_0 + p)y]^2.$$

此方程可写为

$$\begin{aligned}|D(\lambda_0 + iy)|^2 &= [\alpha - y^2]^2 + \beta^2y^2 = \\ &= y^4 + y^2[\beta^2 - 2\alpha] + \alpha^2 \geqslant \alpha^2,\end{aligned}$$

此地 $\alpha = x^2 + px + q$, $\beta = (2x + p)$.

因为 $\beta^2 - 2\alpha = (2\lambda_0 + p)^2 - 2(\lambda_0^2 + \lambda_0 p + q) =$

$$= 2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 p + p^2 - 2q \geqslant 2(6A)^2 - 2(8A^2) = 56A^2 > 0$$

(但 $\lambda_0 = 6A$, $0 < p \leqslant 4A$, $0 < q \leqslant 8A^2$),

故在 $x = \lambda_0$ 上,

$|D(\lambda_0 + iy)|^2$ 之最小值为 $\alpha^2 = (\lambda_0^2 + p\lambda_0 + q)^2$.

其次对 $x = -\frac{L}{2}$, $-L = \mathrm{Re}\left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right) < 0$,

分别 $p^2 - 4q \geqslant 0$ 及

$p^2 - 4q < 0$.

当 $p^2-4q\geqslant 0$.　　$-L=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$,

$$\left|D(-\frac{L}{2}+iy)\right|^2=[\alpha-y^2]^2+\beta^2y^2=$$

$$=y^4+y^2(\beta^2-2\alpha)+\alpha^2,$$

$$\beta^2-2\alpha=2\left[\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{4}\right]^2+\left[\frac{p^2}{2}-2q\right]+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}p>0.$$

因每項均大于零之故.

故当 $p^2-4q\geqslant 0$，有

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2\geqslant \alpha^2=\frac{9}{4}p^2L^2.$$

当　$p^2-4q<0$,

$$-L=-\frac{p}{2},\quad L=\frac{p}{2}.$$

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2=y^4+y^2(\beta-2\alpha)+\alpha^2=$$

$$=y^4+y^2(\beta^2-2\alpha)+\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2+$$

$$+\left[\alpha^2-\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2\right],$$

$$\alpha^2-\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2=\frac{\beta^2}{4}(4\alpha-\beta)=\frac{p^2}{16}(-p^2+q)>0.$$

由此，当 $p^2-4q<0$，有

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2\geqslant\frac{\beta^2}{4}(4\alpha-\beta^2)=-\frac{p^2(p^2-4q)}{16}.$$

对于 $p^2-4q<0$ 进一步計算之.

研究 $\frac{\beta^2-2\alpha}{2}=\frac{\left(2\left(-\frac{p}{4}\right)+p\right)^2-2\left(\left(-\frac{p}{4}\right)^2+p\left(-\frac{p}{4}\right)+q\right)}{2}$.

当 $5p^2-16q\geqslant 0$，則

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2\geqslant\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2+\left(\alpha^2-\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2\right)=\alpha^2=$$

$$=\left[\left(\frac{-p}{4}\right)^2+p\left(\frac{-p}{4}\right)+q\right]^2=$$

$$=\left(\frac{-3p^2+16q}{16}\right)^2\geqslant\left(\frac{q}{4}\right)^2.$$

即当 $p^2-4q<0$，且 $5p^2-16q\geqslant 0$ 时，則

$$|D|^2\geqslant\left(\frac{q}{4}\right)^2.$$

而对 $p^2-4q<0$，且 $5p^2-16q\leqslant 0$ 时，則

$$|D|^2\geqslant\left(\alpha^2-\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2\right)=\frac{\beta^2}{4}(4\alpha-\beta^2)=-\frac{\beta^2}{4}(p^2-4q)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\beta^2\left(-\frac{16}{5}q+q\right)}{4}\geqslant\frac{\frac{4}{5}q\beta^2}{4}=\frac{q}{5}\beta^2=\frac{qp^2}{20}.$$

以下計算 $y=\pm 6Ae$，$\frac{-L}{2}\leqslant x\leqslant\lambda_0$ 上之情形：

$$|D(x\pm i6Ae)|^2=[(x^2-36A^2e^2)+px+q]^2+(2x+p)^2 36A^2e^2.$$

对 x 微商之，有

$$\frac{d}{dx}|D|^2=2(2x+p)[x^2+px+q+36A^2e^2].$$

当 $x>-\frac{p}{2}$，$2x+p>0$，

$$px+36A^2e^2>-\frac{p^2}{2}+36A^2e^2>-\frac{(4A)^2}{2}+36A^2e^2=A^2(36e^2-8)>0.$$

故最小値取在 $x=-\frac{p}{2}$，則有

$$|D(x+i6Ae)|^2\geqslant\left[\left(-\frac{p}{2}\right)^2-36A^2e^2+p\left(-\frac{p}{2}\right)+q\right]^2=$$

$$=\left[\frac{-p^2}{4}+q-36A^2e^2\right]^2\geqslant[36A^2e^2-q]^2\geqslant$$

$$\geqslant[36A^2e^2-8A^2]^2=A^4[36e^2-8]^2.$$

故最小値分別如下：

在 $x=\lambda_0$ 上，$|D|^2\geqslant(\lambda_0^2+p\lambda_0+q)^2$；

在 $y=\pm 6Ae$ 上，$|D|^2\geqslant A^4(36e^2-8)^2$；

在 $x=-\frac{L}{2}$ 上，$-L=\mathrm{Re}\left(-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)<0$；

当 $p^2-4q\geqslant 0$，$|D|^2\geqslant\frac{9}{4}p^2L^2$；

当 $p^2-4q<0$，$\begin{cases}\text{且 } 5p^2-16q\geqslant 0 \text{ 时}, & |D|^2\geqslant\left(\frac{q}{4}\right)^2,\\ \text{且 } 5p^2-16q<0 \text{ 时}, & |D|^2\geqslant\frac{qp^2}{20}.\end{cases}$

以下比較上面五个值之大小：

$$(\lambda_0^2+p\lambda_0+q)^2=(36A^2+p6A+q)^2\leqslant$$

$$\leqslant A^4(36+24+8)^2=A^4(68)^2<A^4(36e^2-8)^2.$$

故 R 上之最小值可以不計 $y=\pm 6Ae$ 上之情形.

由 $\frac{qp^2}{20}\leqslant\frac{8A^2(AA)^2}{20}=\frac{8\times 16A^4}{20}=\frac{32}{5}A^4\leqslant(36A^2)^2\leqslant(36A^2+p6A+q)^2.$

故在 $x=\lambda_0$ 上之最小值可以不計.

現在只要比較

$$\frac{9}{4}p^2L^2, \qquad \left(\frac{q}{4}\right)^2, \qquad \frac{qp^2}{20},$$

此地

$$L=\frac{p}{2}-\left|\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right|.$$

由二項式

$$\sqrt{1-\omega}=1-\frac{\omega}{2}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 2}\omega^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3-\cdots.$$

当 $0<\omega<1$ 成立.

故

$$\sqrt{p^2-4q}=p\sqrt{1-\frac{4q}{p^2}}=p\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{4q}{p^2}\right)-\cdots-\right],$$

或

$$L=\frac{p}{2}-\left|\frac{\sqrt{p^2-4\varepsilon}}{2}\right|=\frac{p}{2}\left[1-1+\frac{1}{2}\left(\frac{4q}{p^2}\right)+\cdots\right]$$

$$\geqslant\frac{p}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{4q}{p^2}\right]=\frac{q}{p}.$$

故

$$\frac{9}{4}p^2L^2\geqslant\frac{9}{4}\frac{p^2q^2}{p^2}=\frac{9}{4}q^2>\left(\frac{q}{4}\right)^2.$$

因此,只要比較

$$\left(\frac{q}{4}\right)^2 \quad 及 \quad \left(\frac{qp^2}{20}\right),$$

这两者是无法比較大小,因 p 与 q 各自独立.

由此最后得到

$$|D|^2\geqslant\min\left[\left(\frac{q}{4}\right)^2,\ \frac{qp^2}{20}\right].$$

現在在四边形 R 上,

$$|\lambda|\leqslant\sqrt{\lambda_0^2+(6Ae)^2}=\sqrt{(6A)^2+(6Ae)^2}=6A\sqrt{1+e^2},$$

故

$$|H(\lambda,\tau_{ij})|\leqslant 6A\sqrt{1+e^2}\,2A|e^{-\lambda\tau}-1|+ + 8A^2|e^{-\lambda\tau}-1| + 2A^2|e^{-\lambda\tau}-1|^2.$$

当 $|\lambda\tau|<\eta<1$, 則 $|e^{-\lambda\tau}-1|\leqslant 2\eta$.

故当 $|\lambda\tau|<\eta<1$,

$$\begin{aligned}|H(\lambda,\tau_{ij})| &\leqslant[12A^2\sqrt{1+e^2}+8A^2+8A^2\cdot 2\eta]\cdot 2\eta\leqslant\\ &\leqslant[12A^2\sqrt{1+e^2}+8A^2+8A^2]\cdot 2\eta\leqslant\\ &\leqslant[36A^2+16A^2]\,2\eta\leqslant\\ &\leqslant 104\,\eta A^2.\end{aligned}$$

要使
$$[104\,\eta A^2]^2 < \min\left[\left(\frac{q}{4}\right)^2, \frac{qp^2}{20}\right],$$

即要
$$\eta^2 < \frac{\min\left[\left(\frac{q}{4}\right)^2, \quad \frac{qp^2}{20}\right]}{[104\,A^2]^2}$$

($\eta < 1$ 之条件这里已包有了，因为 $q \leqslant 8A^2$, $p \leqslant 4A$.

故
$$\left(\frac{\min\left[\left(\frac{q}{4}\right)^2, \frac{qp^2}{20}\right]}{[104A^2]^2}\right) \leqslant \frac{\min\left(4, \frac{8\times 4^2}{20}\right)}{(104)^2} = \frac{4}{(104)^2} < 1\Bigg).$$

以下只要
$$|\lambda\tau|^2 < \frac{\min\left[\left(\frac{q}{4}\right)^2, \frac{qp^2}{20}\right]}{(104A^2)^2},$$

但 $|\lambda| \leqslant 6A\sqrt{1+e^2} \leqslant 18A$.

故只要
$$\tau^2 \leqslant \frac{\min\left[\left(\frac{q}{4}\right)^2, \frac{qp^2}{20}\right]}{(18A)^2\,(104A^2)^2},$$

或
$$\tau \leqslant \sqrt{\frac{\min\left[\left(\frac{q}{4}\right)^2, \frac{qp^2}{20}\right]}{18^2 \times 104^2 A^6}},$$

或
$$0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{7000}\sqrt{\min\left(\frac{q^2}{A^4}, \frac{qp^2}{A^4}\right)}\frac{1}{A}$$

即足够了.

最后結果:
$$\triangle \text{可取为} \frac{1}{7000}\sqrt{\min\left(\frac{q^2}{A^4}, \frac{qp^2}{A^4}\right)}\cdot\frac{1}{A}.$$

以下轉入对不稳定情形之时滞界限进行估計.

分别 $pq \neq 0$ 及 $pq = 0$ 估計之.

当 $pq \neq 0$ 时又分别二种情形研究:
$$p^2 - 4q \leqslant 0,$$
$$p^2 - 4q > 0.$$

当
$$p^2 - 4q \leqslant 0, \qquad -\frac{p}{2} > 0 \qquad (p < 0),$$

$D(\lambda) = 0$ 之根在
$$\frac{-p \pm i\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

取四条直綫作长方形：

$$x=-\frac{p}{4},\quad x=-p;\quad y=\pm\sqrt{4q}.$$

在 $x=-\frac{p}{4}$ 上研究之：

$$\left|D\left(-\frac{p}{4}+iy\right)\right|^2=y^4+y^2\left[\frac{p^2}{4}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{16}-q\right]+$$

$$+\left[\frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{4}+q\right]^2,$$

$$0=\frac{d|D|^2}{dy}=2y\left[2y^2+\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{16}-q\right)\right].$$

图 6

则
$$y=0\ \text{及}\ y^2=\frac{1}{2}\left[q-\frac{p^2}{2}+\frac{p^2}{16}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[q-\frac{7}{16}p^2\right]\ \text{为解}.$$

分别 $q-\frac{7}{16}p^2\leqslant 0$ 及 $q-\frac{7}{16}p^2\geqslant 0$，

当 $q-\frac{7}{16}p^2\leqslant 0$，则 $y=0$ 为极小，

$$\left|D\left(-\frac{p}{4}+0\right)\right|^2=\left[-\frac{3p^2}{16}+q\right]^2.$$

現 $p^2-4q\leqslant 0$，　$q-\frac{7}{16}p^2\leqslant 0$，

故
$$\frac{1}{4}p^2\leqslant q\leqslant\frac{7}{16}p^2,$$

则有
$$\frac{1}{16}p^2\leqslant q-\frac{3p^2}{16}\leqslant\frac{p^2}{4},$$

故
$$|D|^2\geqslant\left(\frac{p^2}{16}\right)^2.$$

当 $q-\frac{7}{16}p^2>0$，

则
$$\left.\frac{d^2|D|^2}{dy^2}\right|_{y=0}=\left[\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{16}-q\right]=$$

$$=\frac{7}{16}p^2-q<0.$$

故 $y=0$ 是极大．

故极小在 $y=\frac{1}{4}\left(q-\frac{7}{16}p^2\right)$,

$$\left|D\left(-\frac{p}{4}+iy\right)\right|^2\geqslant\left[\frac{p^2}{4}+\frac{3}{4}q\right]^2+\frac{p^2}{16}\left(q-\frac{7}{16}p^2\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left[\frac{p^2}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{16}p^2\right]^2=\left[\frac{37}{64}p^2\right]^2.$$

但 $\left(\frac{1}{16}\right)<\frac{37}{64}$.

故在 $x=-\frac{p}{4}$ 上, $|D|^2\geqslant\left(\frac{p^2}{16}\right)^2$.

在 $x=-p$ 上, $|D(p+iy)|^2=y^4+(p^2-2q)y^2+q^2$,

$$0=\frac{d}{dy}|D|^2=y[3y^2+2(p^2-2q)],$$

故

$$y=0,\ 3y^2+2(p^2-2q)=0.$$

当 $p^2-2q\geqslant 0$, 则 $y=0$ 为极小,

$$|D|^2\geqslant q^2\geqslant\left(\frac{p^2}{4}\right)^2.$$

当 $p^2-4q<0$, 则 $y^2=-\frac{2}{3}(p^2-2q)$ 为极小;

$$|D|^2\geqslant\left[q+\frac{2}{3}(p^2-2q)\right]^2+p^2\left[\frac{2}{3}(2q-p^2)\right]\geqslant\frac{p^4}{4}.$$

因此在 $x=-p$ 上, $|D|^2\geqslant\left(\frac{p^2}{4}\right)^2$.

以下研究 $y^2=4q$ 之情形;

$$|D(x\pm\sqrt{4q}\,i)|^2=[x^2+px+q-4q]^2+(2x+p)^2 4q,$$

$$\frac{d}{dx}|D|^2=2(2x+p)[x^2+px+5q].$$

但

$$p^2-4(5q)=(p^2-4q)-16q\leqslant -16q<0,$$

故

$$0=\frac{d}{dx}|D|^2,\ \text{只有 } 2x+p=0 \text{ 或 } x=-\frac{p}{2}.$$

由此,有

$$|D(x\pm\sqrt{4q}\,i)|^2\geqslant\left|D\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{4q}\,i\right)\right|^2=$$

$$=\left[-\frac{p^2}{4}-3q\right]^2\geqslant\left(\frac{p^2}{4}\right)^2\quad(\because q<0).$$

总結得到:

$p^2-4q\leqslant 0$ 时, 在四边形 R 上:

$$|D|^2\geqslant\left(\frac{p^2}{16}\right)^2.$$

由 $$|D(x+iy)|^2 = [x^2+px+q]^2 + [(2x+p)^2 - 2(x^2+px+q)]y^2 + y^4,$$

$$0 = \frac{\partial |D|^2}{\partial y} = y[4y^2 + 2[(2x+p)^2 - 2(x^2+px+q)],$$

解 $y=0$ 及

$$y^2 = \frac{1}{2}[-2x^2 - 2px + 2q - p^2];$$

由 $$-2x^2 - 2px + 2q - p^2 = 0,$$

$$x = \frac{p \pm \sqrt{4q - p^2}}{-2}.$$

在 $p^2 - 4q > 0$ 时，$\sqrt{4q-p^2}$ 为虚的，故实的 x 不存在，因此，最小值只有在 $y=0$.

故当 $p^2 - 4q > 0$，則 $|D(x+iy)|^2 \geqslant [x^2+px+q]^2$.

分别 $q>0$ 及 $q<0$ 两种情形：

当 $q>0$ 时，由不稳定性知 $p<0$.

取四边形 R_1:

$$x = 0, \quad 及 \quad x = -p > 0;$$

$$y = \pm L, \quad L = 2|p| + \sqrt{|q|} > 0,$$

則在 $x=0$ 及 $x=-p>0$ 边上

$|D|^2$ 分别大于等于 $|D(0)|^2$ 及 $|D(-p)|^2$.

即 $$[q]^2 \text{ 及 } [(-p)^2 + p(-p) + q]^2 = q^2.$$

取 $$y = \pm L, \quad L = 2|p| + \sqrt{|q|},$$

則在 $$y = \pm L, \quad 0 \leqslant x \leqslant -p \text{ 上:}$$

$$\begin{aligned}|D(x+iy)|^2 &\geqslant [x^2+px+q-y^2]^2 \geqslant \\ &\geqslant [2p^2 + q - (2|p| + \sqrt{|q|})^2]^2 = \\ &= 4|p|\,[|p| + \sqrt{|q|}]^2 \geqslant \\ &\geqslant 4.2\sqrt{|q|}\,[2\sqrt{|q|} + \sqrt{|q|}]^2 \geqslant 72(q)^2 > q^2.\end{aligned}$$

故在 R_1 上即有 $|D|^2 \geqslant q^2$.

其次对 $q<0$ 之情形：

取四边形 R_2:

$$x = 0, \qquad x = \frac{-p + |p| + 2\sqrt{|q|}}{2};$$

$$y = \pm L_1, \qquad L_1 = \sqrt{2}\,(|p| + \sqrt{|q|}) > 0.$$

則在 $x=0$ 上，

$$|D(x+iy)|^2 \geqslant |D(0)|^2 = q^2;$$

在 $x = \dfrac{-p+|p|+2\sqrt{|q|}}{2}$ 上，

$$|D(x+iy)| \geqslant \left|D\left(\frac{-p+|p|+2\sqrt{|q|}}{2}\right)\right|^2 = p^2|q|;$$

在 $y=\pm L_1$, $0\leqslant x\leqslant \frac{-p+|p|+2\sqrt{|q|}}{2}$ 上,

$$|D(x+iy)|^2\geqslant[x^2+px+q-y^2]^2\geqslant$$
$$\geqslant[|x|^2+|px|+|q|-y^2]^2\geqslant$$
$$\geqslant\left[\left(\frac{-p+|p|+2\sqrt{|q|}}{2}\right)^2+\left(\frac{-p+|p|+2\sqrt{|q|}}{2}\right)|p|+q-L_1^2\right]^2\geqslant$$
$$\geqslant[(|p|+\sqrt{|q|})^2+(|p|+\sqrt{|q|})|p|+|q|-2(|p|+\sqrt{|q|})^2]^2=$$
$$=p^2|q|.$$

因此当 $q<0$, $p^2-4q>0$. 在 R_2 上, $|D|^2$ 之最小值大于等于 $\min[p^2|q|, q^2]$.

以下总結計算之:

在 R 上 $|\lambda|^2$ 最大为 $(-p)^2+(\sqrt{4q-p^2})^2=4q$;

在 R_1 上 $|\lambda|^2$ 最大为 $(-p)^2+(2|p|+\sqrt{|q|})^2$;

在 R_2 上 $|\lambda|^2$ 最大为 $\left(\frac{-p+|p|+2\sqrt{|q|}}{2}\right)^2+[\sqrt{2}(|p|+\sqrt{|q|})]^2$.

这些 $|\lambda|^2$ 均小于或等于 $3(|p|+\sqrt{|q|})^2$.

在 $p^2-4q\leqslant 0$, $|D|^2\geqslant\left(\frac{p}{16}\right)^2$;

在 $p^2-4q>0$, $q>0$, $|D|^2\geqslant q^2$;

在 $p^2-4q>0$, $q<0$, $|D|^2\geqslant\min[p^2|q|, q^2]$.

注意到 $\min[p^2, q]\leqslant\sqrt{p^2|q|}$, 故对所有情形:

$$|D|^2\geqslant\left(\frac{1}{16}\right)^2\min[p^4, q^2].$$

而对所有情形:

$$|\lambda|\leqslant\sqrt{3}(|p|+\sqrt{|q|})\leqslant\sqrt{3}(4A+\sqrt{8}A)\leqslant 16A.$$

故
$$|H(\lambda,\tau_{ij})|\leqslant 16A_1^2 2A|e^{-\lambda\tau}-1|+8A^2|e^{-\lambda\tau}-1|+$$
$$+2A|e^{-\lambda\tau}-1|^2.$$

当 $|\lambda\tau|<\eta<1$, 有 $|e^{-\lambda\tau}-1|\leqslant 2\eta$.

故当 $|\lambda\tau|<\eta<1$, $|\lambda|\leqslant 16A$, 有

$$|H(\lambda,\tau_{ij})|\leqslant[32A^2+8A^2+2A^2\cdot 2\eta]\cdot 2\eta\leqslant$$
$$\leqslant 88A^2\eta.$$

要使 $[88A^2\eta]^2<\left(\frac{1}{16}\right)^2\min[p^4, q^2]$,

只要取

$$\eta^2<\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^2\min(p^4, q^2)}{(88)^2\cdot A^4}$$

($\eta<1$ 之条件已包括在内,因为 $|q|\leqslant 8A^2$, $|p|\leqslant 4A$).

以下只要取

$$|\lambda\tau|^2 < \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^2 \min\,[p^4, q^2]}{(88)^2 A^4\cdot(16)^2\cdot A^2}.$$

因此对 $pq \neq 0$ 可以取

$$\Delta = \frac{1}{23000}\sqrt{\min\left[\frac{p^4}{A^4}, \frac{q^2}{A^4}\right]}\cdot\frac{1}{A}$$

卽得.

当 $pq = 0$ 时，又分

$$q = 0, \quad p \neq 0,$$
$$及\ q \neq 0, \quad p = 0$$

两种情形估計之：
当 $q = 0$，$p < 0$ 时，
$D(\lambda) = 0$ 之根在 0 及 $-p > 0$.
取四条直綫：

$$x = -\frac{p}{2}, \qquad x = -2p;$$
$$y = \pm L_3, \qquad L_3 = -p > 0;$$

则在 $x = -\frac{p}{2}$ 上，

$$\begin{aligned}|D(x+iy)|^2 &= |(x+iy)^2 + p(x+iy)|^2 = \\ &= |x+iy|^2|x+iy+p|^2 = \\ &= \left|-\frac{p}{2}+iy\right|^2\left|\frac{p}{2}+iy\right|^2 = \left|\frac{p}{2}+y^2\right|^2 \geqslant \left(\frac{p^2}{2}\right)^2;\end{aligned}$$

在 $x = -2p$ 上，

$$\begin{aligned}|D(x+iy)|^2 &= |x+iy|^2|x+iy+p|^2 = \\ &= |-2p+iy|^2|-2p+iy+p|^2 \geqslant \\ &\geqslant 4p^4;\end{aligned}$$

在 $y = \pm L_3$，　$L_3 = -p > 0$ 上，有

$$|D(x+iy)|^2 \geqslant y^4 = p^4.$$

故总合有 $|D(x+iy)|^2 \geqslant 4p^4$，

而

$$|\lambda|^2 \leqslant (2p)^2 + (p^2) = 5p^2 \leqslant 5(4A)^2 \leqslant (12A)^2,$$
$$H(\lambda,\tau_{ij}) \leqslant [12A\cdot 2A + 8A^2 + 2A\cdot 2\eta]\cdot 2\eta \leqslant$$
$$\leqslant 72A^2.$$

故

$$|\lambda\tau|^2 \leqslant \frac{4p^4}{(72A)^2}\ 或$$

$$\tau \leqslant \frac{2p^2}{72A^2\cdot 12A} = \frac{p^2}{432A^3}.$$

故当 $q = 0$，可取 $\Delta = \dfrac{p^2}{432A^3}$.

若 $p=0$，则 $q<0$ 方得不稳定.

故
$$|D(x+iy)|^2 \geqslant (x^2+q)^2,$$

则在 $x=0$ 上，$|D(x+iy)|^2 \geqslant |D(0)|^2 = q^2$；

而在
$$x=\sqrt{2|q|} \text{ 上}, |D(x+iy)|^2 \geqslant q^2;$$

在 $y=\pm L_2$, $L_2=\sqrt{2}\sqrt{|q|}>0$, $0\leqslant x\leqslant\sqrt{2|q|}$ 上有
$$|D(x+iy)|^2 \geqslant [x^2+q^2-y^2]^2 \geqslant (2|q|+q-2|q|)^2 \geqslant q^2.$$

因此，当 $p=0$，则在四边形 $x=0$, $x=\sqrt{2|q|}$, $y=\pm\sqrt{2|q|}$ 上，

有
$$|D(x+iy)|^2 \geqslant q^2.$$

又
$$\lambda^2 = x^2+y^2 \leqslant 4|q| \leqslant 32A^2 < (6A)^2.$$

故
$$\begin{aligned}|H(\lambda,\tau_{ij})| &\leqslant 6A\cdot 2A|e^{-\lambda\tau}-1| + 8A^2|e^{-\lambda\tau}-1| + \\ &\quad + 2A^2|e^{-\lambda\tau}-1|^2 \\ &\leqslant [12+8+4\eta]A^2\cdot 2\eta \leqslant \\ &\leqslant 48A^2\eta.\end{aligned}$$

故
$$|\lambda\tau|^2 \leqslant \frac{q^2}{(48A^2)^2},$$

或
$$\tau \leqslant \frac{q}{288A^3}.$$

故当 $p=0$，可取 $\Delta = \dfrac{q}{288A^3}$.

用李雅普諾夫函数方法对稳定情形之时滞界限进行估計：
$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt} = a_1x(t)+a_2x(t-\tau_1)+b_1y(t)+b_2y(t-\tau_2), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = c_1x(t)+c_2x(t-\tau_3)+d_1y(t)+d_2y(t-\tau_4).\end{cases}$$

将上方程組改写成下列形式：
$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt} = (a_1+a_2)x(t)+a_2[x(t-\tau_1)-x(t)]+(b_1+b_2)y(t)+b_2[y(t-\tau_2)-y(t)], \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = (c_1+c_2)x(t)+c_2[x(t-\tau_3)-x(t)]+(d_1+d_2)y(t)+d_2[y(t-\tau_4)-y(t)].\end{cases}$$

作
$$\begin{aligned}V(x(t),y(t)) &= q(x^2(t)+y^2(t)) + [(c_1+c_2)x(t)-(a_1+a_2)y(t)]^2 + \\ &\quad + [(d_1+d_2)x(t)-(b_1+b_2)y(t)]^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x(t)}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y(t)}\frac{dy(t)}{dt} = \\ &= -pq(x^2(t)+y^2(t)) + \{2qx(t)+2[(c_1+c_2)x(t)-(a_1+a_2)y(t)][c_1+c_2]+ \\ &\quad + 2[(d_1-d_2)x(t)-(b_1+b_2)y(t)](d_1+d_2)\}\{a_2[x(t-\tau_1)-x(t)]+ \\ &\quad + b_2[y(t-\tau_2)-y(t)]\} + \{2qy(t)-2[(c_1+c_2)x(t)-(a_1+a_2)y(t)](a_1+ \\ &\quad + a_2)-2[(d_1+d_2)x(t)-(b_1+b_2)y(t)](b_1+b_2)\}\{c_2[x(t-\tau_3)-x(t)]+ \\ &\quad + d_2[y(t-\tau_4)-y(t)]\}.\end{aligned}$$

記 $A = \max_{i=1,2}[|a_i|, |b_i|, |c_i|, |d_i|]$,

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -2pq(x^2(t)+y^2(t)) + 2[(8A^2+8A^2)x(t) + (4A^2 + 4A^2)|y(t)|]\cdot A[|x(t-\tau_1)-x(t)| + |y(t-\tau_2)-y(t)|] + 2[(8A^2+8A^2)|y(t)| + (4A^2+4A^2)|x(t)|]\cdot A[|x(t-\tau_3)-x(t)| + |y(t-\tau_4)-y(t)|].$$

現在来仔細估值.

$$|x(t-\tau_i)-x(t)| = \left|\int_{t-\tau_i}^{t}\frac{dx(t)}{dt}dt\right| \leqslant |\tau_i||x'(t')| \leqslant |\tau_i|A[|x(t')| + |y(t')| + |x(t'-\tau_i)| + |y(t'-\tau_i)|],$$

同理 $|y(t-\tau_j)-y(t)| \leqslant |\tau_j|A[|x(t'')| + |x(t''-\tau_j)| + |y(t'')| + |y(t''-\tau_j)|]$.

取

$$\tau = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4),$$

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -2pq(x^2(t)+y^2(t)) + 32A^4\cdot\tau[8+4\times4\times24A^2](|x(t)|^2+|y(t)|^2).$$

由于 $[(c_1+c_2)x(t)-(a_1+a_2)y(t)]^2 \leqslant 8A^2[x^2(t)+y^2(t)]$,

∴ $V(x(t), y(t)) \leqslant 24A^2(x^2(t)+y^2(t))$.

但另一方面：

$$24A^2(x^2(t)+y^2(t)) \geqslant V(x(t),y(t)) \geqslant q(x^2(t)+y^2(t)) \qquad (*)$$

故如果 $x(t'-\tau_i), y(t'-\tau_j)$ 与在 $4V(x(t),y(t))$ 中則由（*）有

$$x^2(t'-\tau_i) + y^2(t'-\tau_j) \leqslant \frac{4.24A^2(x^2(t)+y^2(t))}{q}.$$

因此 $V(x(t),y(t))$ 正定，而要使 $\frac{dV}{dt}$ 負定，必須取.

$$\tau \leqslant \frac{pq}{4\times16A^4\left[8+16\frac{24A^2}{q}\right]} = \frac{pq}{256A^4\left[1+\frac{48A^2}{q}\right]}.$$

参　考　文　献

[1] 秦元勳：稳定性理論中微分方程与微分差分方程的等价性. 数学学报，8卷4期(1958)，457—472.

[2] Hayes, N. D., Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation, *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 226—232.

[3] Bellman, R., On the existence and boundedness of solutions of nonlinear differential-difference equations. *Ann. Math.*, **50** (1949), 347—355.

* 这个估計对于变时差也是可用的.

ON THE EQUIVALENCE PROBLEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DIFFERENCE-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE THEORY OF STABILITY

CHIN YUAN-SHUN, LIU YING-CHING, WANG LIAN
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

I. THE PROBLEM AND THE METHODS

The equivalence problem was proposed and solved systematically in [1] for the case $n = 1$. This article treats the case for general n.

The problem is to investigate the equivalence problem of stability between the system of differential equations

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})\, x_j(t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

and the system of difference-differential equations

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\, x_j(t) + b_{ij}\, x_j(t - \tau_{ij}(t))) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{2}$$

where a_{ij}'s and b_{ij}'s are given constants, and $\tau_{ij}(t)$'s may be non-negative real constants or non-negative real continuous functions of t.

The equivalence problem between nonlinear systems will be considered correspondingly. In order to solve this problem, a theorem of Hayes [2] was used in [1] while corresponding complete theorems for general n do not seem to appear in literature. For solving our problem we use two types of methods.

The first-type method is used to treat the case when $\tau_{ij}(t)$'s are non-negative real constants. In this case the relation between the roots of the characteristic equations

$$D(\lambda) \equiv |a_{ij} + b_{ij} - \delta_{ij}\, \lambda| = 0 \tag{3}$$

and

$$D(\lambda; \tau_{ij}) \equiv |a_{ij} + b_{ij}\, e^{-\lambda \tau_{ij}} - \delta_{ij}\, \lambda| = 0 \tag{4}$$

is investigated, and relations between (1) and (2) are deduced.

The second-type method is to rewrite (2) in the following form

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}+b_{ij})\, x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j\,(t - \tau_{ij}(t)) - x_j(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})\, x_j(t) + \psi_i(t), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{2'}$$

In case $\tau_{ij}(t)$'s are small, $\psi_i(t)$ may be regarded as small disturbances, hence properties of (2) will be deduced from (1).

Each method has its own merits and shortcomings.

II. The Equivalence of Stability

Lemma 1. If all the roots of (3) possess negative real parts, then there exist two positive numbers $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0$ and $\tau = \tau(a_{ij}, b_{ij}) > 0$ such that all the roots of (4) satisfy the inequality

$$\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant -\tau$$

provided that

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

On the basis of Lemma 1 we have

Theorem 1. If the trivial solution of (1) is asymptotically stable, then there exists a positive constant $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0$ such that the trivial solution of (2) is also asymptotically stable, provided that $\tau_{ij}(t)$'s are constants τ_{ij} and satisfy the inequality

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Using the second-type method, this theorem will be improved as follows:

Theorem 2. The hypothesis that $\tau_{ij}(t)$'s are constants can be omitted, and the conclusion of Theorem 1 still holds, provided that

$$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Theorems 1 and 2 are natural generalizations of Theorem 1 of [I].

III. The Equivalence of Instability

Lemma 2. If (3) possesses at least one root with positive real part, then there exists a positive constant $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0$ such that (4) possesses at least one root with positive real part, provided that

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

On the basis of Lemma 2 we have

Theorem 3. If (3) possesses at least one root with positive real part, hence the trivial solution of (1) is unstable, then there exists a real positive constant $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0$ such that the trivial solution of (2) is also unstable, provided that the $\tau_{ij}(t)$'s are constants and satisfy the inequality

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Using the second-type method, this theorem will be improved as follows:

Theorem 4. The hypothesis that $\tau_{ij}(t)$'s are constants can be omitted, and the conclusion of theorem 3 still holds, provided that

$$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Theorems 3 and 4 are only partial generalizations of Theorem 2 in [1]. In order to extend the range of τ, we have the following extensions:

Lemma 3. Let $D(0)$ and $(-1)^n$ be of different signs, i.e., equation (3) has odd number of roots with positive real parts, and $\lambda = 0$ is not a root; then for any system of real numbers $\tau_{ij} \geqslant 0$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, equation (4) possesses at least one root with positive real part.

Theorem 5. Let $D(0)$ and $(-1)^n$ be of different signs. The trivial solution of (1) is unstable, then the trivial solution of (2) is also unstable.

In case that equation (3) has even number of roots with positive real parts, and $\lambda = 0$ is not a root, counter example is given to show that for certain $\tau_{ij} \geqslant 0$, (4) has only roots with negative real parts.

Theorem 6. Given a differential-difference equation

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau(t)), \tag{5}$$

where the constants a and b satisfy the conditions:

(i) $a + b > 0$,

(ii) $\tau(t)$ is a non-negative bounded real continuou s function of t (here the uppe bound of $\tau(t)$ can be any finite positive number and has no connection with a and b) then the trivial solution of (5) is unstable.

IV. NONLINEAR CASE

Theorem 7. Let the trivial solution of (1) be asymptotically stable. Given a non-linear system.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j(t) + b_{ij} x_j(t - \tau_{ij}(t))) + F_2^{(i)}, \tag{6}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

where

$$F_2^{(i)} = \sum_{\sum_j (l_j + m_j) \geqslant 2} P_i^{(l_1, \cdots, l_n, m_1, \cdots, m_n)}(t) \cdots x_n^{l_n}(t)\, x_1^{m_1}(t - \tau_{i_1}(t)) \cdots x_n^{m_n}(t - \tau_{in}(t)),$$

and there exists an $\varepsilon > 0$, such that

$$\sum_{\sum_j (l_j + m_j) \geqslant 2} |P_i^{(l_1, \cdots, l_n, m_1, \cdots, m_n)}| \ \varepsilon^{l_1 + \cdots + l_n + m_1 + \cdots + m_n} < \infty,$$

then there exists a positive number $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}, F_2^{(i)}) > 0$, such that the trivial solution of (6) is also asymptotically stable, provided that

$$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Theorem 8. Given an equation

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau(t)) + F_2 \tag{7}$$

satisfying the following conditions:

(i) $a + b > 0$,

(ii) $\tau(t)$ is non-negative real bounded continuous function,

(iii) $F_2 \equiv \sum_{i+j \geqslant 2} P_{ij} x^i(t)\, x^j(t - \tau(t))$,

and there exists an $\varepsilon > 0$ such that

$$\sum_{i+j\geq 2} |P_{ij}| \, \varepsilon^{i+j} < \infty,$$

then the trivial solution of (7) is unstable.

Theorem 9. If (3) possesses at least one root with positive real part, hence the trivial solution of (1) is unstable, and the remaining hypotheses are the same as Theorem 8, then there exists a positive number

$$\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}, F_2^{(i)}) > 0,$$

such that the trivial solution of (6) is also unstable, provided that

$$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

V. The case $n = 2$

Both methods are applied to the case $n = 2$ to calculate the bound Δ.

Let $A = \max\limits_{i,j=1,2} [|a_{ij}|, |b_{ij}|]$,

$$p = -[a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22}],$$

$$q = (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{21} + b_{21})(a_{12} + b_{12}).$$

From the first method Δ may be taken as

$$\frac{1}{7000}\sqrt{\mathrm{Min}\left(\frac{q^2}{A^4}, \frac{qp^2}{A^4}\right)}\frac{1}{A} \quad \text{for the stable case,}$$

and from the second method Δ may be taken as

$$\frac{pq}{256\, A^4\left[1 + \dfrac{A^2}{q}\right]}.$$

For the case of instability, Δ may be taken as

$$\frac{1}{23000}\sqrt{\min\left[\frac{p^4}{A^4}, \frac{q^2}{A^4}\right]}\frac{1}{A} \quad \text{for } p \neq 0,\ q \neq 0$$

$$\frac{p^2}{432\, A^3} \quad \text{for} \quad q = 0$$

and

$$\frac{q}{288\, A^3} \quad \text{for} \quad p = 0.$$

VI. Remarks

The results can still be extended. In particular the first-type method can be used to investigate linear systems with arbitrarily large constant time lags, whereas the second-type method can be applied to the critical case with sufficiently small time lags. Results of these cases will be published separately.

References

[1] Chin Yuan-Shun 1957 *Science Record*, New Ser. 1 (5), 11—13.
[2] Hayes, N. D., *J. London Math. Soc.* 25 (1950), 226—232.

and there exists an $\varepsilon > 0$, such that [illegible]

[illegible]

then the trivial solution of (7) is unstable.

Theorem 9. If [illegible] with positive real part, [illegible] trivial solution of (1) is unstable, and the remaining hypotheses [illegible] Theorem [illegible] then there exists a positive number

[illegible]

such that the trivial solution of (6) is also unstable, provided that

$$0 \leqslant r_{ij}(t) \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

V. The case $n = 2$

Both methods are applied to the case $n = 2$ to calculate the bound Δ.

Let $A = \max\left[\,|a_{ij}|,\ |b_{ij}|\,\right]$,

$$p = -(a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22}),$$

$$q = (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}).$$

From the first method Δ may be taken as

[illegible] for the stable case,

and from the second method Δ may be taken as

[illegible]

For the case of instability, Δ may be taken as

[illegible] for $p \neq 0$, $q \neq 0$

[illegible] for [illegible]

[illegible] for $q = 0$.

VI. Remarks

The results can still be extended. In particular the first-type method can be used to investigate linear systems with arbitrarily large constant time lags, whereas the second-type method can be applied to the critical case with sufficiently small time lags. Results of these cases will be published separately.

References

[1] Chin Yuan-Shun [illegible] *Science Record*, New Ser. 1 (?), [illegible].

[2] [illegible], *J. London Math. Soc.* 25 (1950), [illegible].

数学学報編輯委員会

数学学报 第 9 卷 第 3 期

Acta Mathematica Sinica, Vol. 9, No. 3

（季 刊）

編 輯 者	中 国 数 学 会
出 版 者	科 学 出 版 社
印 刷 者	中国科学院印刷厂
总 发 行 处	北 京 市 邮 局
訂 购 处	全 国 各 地 邮 电 局
代訂另售处	全国各地新华书店 科学出版社各地門市部

（京）道：1—1,010 报：1—2,030 1959年9月出版

本刊代号：道 2—50 报 2—50

本期定价：道林本 2.60 元 报紙本 1.80 元